2　全称命題と存在命題

• 2-1：全称命題と存在命題

集合 X を定義域とする命題関数 $P(x)$ が与えられたとき, 次のような命題関数を考えることができる.

(i) すべての $x \in X$ について $P(x)$ である.
(ii) ある $x \in X$ について, $P(x)$ である.

(i) の形の命題を **全称命題** と呼び, (ii) の形の命題を **存在命題** と呼ぶ. 全称命題と存在命題は記号を用いて次のように表される.

- 全称命題「定義域 X の任意の元 $a \in X$ について命題 $P(a)$ は真である」ことを「$\forall\ a \in X,\ P(a)$」と書く. 記号 $\forall$ は「すべての」という意味の記号である.
- 存在命題「定義域 X の元 $a \in X$ で, 命題 $P(a)$ が真となるようなものが存在する」ことを, 「$\exists\ a \in X$ (s.t.) $P(a)$」と書く. ここで, (s.t.) は such that の省略形である. 記号 $\exists$ は「ある」「存在する」の意味の記号であり, $\exists$ は単体で用いることはできず, (s.t.) とセットで用いる.

例 2-1　自然数全体 $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数

$$P(x):\text{「}x\text{ を }3\text{ で割った余りは }1\text{」または「}x\text{ は素数」}$$

を考えよう. $A, B \subset \mathbb{N}$ を

$$A := \{x \in \mathbb{N} \mid n \text{ は偶数 }\}, \quad B := \{2, 3, 4, 5, 7\}$$

とおく.

(1) 全称命題「$\forall a \in A, P(a)$」は $a = 6$ が反例になるから偽であり, 存在命題「$\exists a \in A$ (s.t.) $P(a)$」は例えば $a = 2$ ととればよいから真である.

(2) $x = 2, 3, 5, 7$ は素数なので $P(2), P(3), P(5), P(7)$ は真である. $x = 4$ のとき, 4 は 3 で割ると余りは 1 なので, やはり $P(4)$ も真である. よって全称命題「$\forall b \in B, P(b)$」は真である. 特に, $x = 2$ のとき $P(2)$ は真だったから存在命題「$\exists b \in B$ (s.t.) $P(b)$」も真である.

レポート 2-1　$\mathbb{R}$ を定義域にもつ命題関数

$$P(k): 2\text{ 次方程式 } x^2 + kx + (2k - 3) = 0 \text{ は異なる }2\text{ つの実数解をもつ}$$

を考える. 部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ を $A := \{k \in \mathbb{R} \mid k < 2,\ 6 < k\}$, $B := \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leq k \leq 6\}$ とおくとき, 上で与えた命題関数の定義域を A, B に置き換えた全称命題と存在命題の真偽を調べよ.

• 2-2：$\forall$ と $\exists$ が混在する命題

命題のなかには, $\forall$ と $\exists$ が混在する場合もある. 例えば, 次のような 2 つの命題を考えてみよう.

$$P: \forall x \in [-1, 1],\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ \text{(s.t.)}\ \ x^2 + y^2 = 1,$$
$$Q: \exists y \in \mathbb{R}\ \ \text{(s.t.)}\ \ \forall x \in [-1, 1],\ x^2 + y^2 = 1.$$

この 2 つの命題は, 互いに $\forall$ と $\exists$ の位置を入れ替えて得られる命題であるが, その内容は大きく異なる.

まず, 命題 P は

$$\text{任意の } -1 \leq x \leq 1 \text{ に対して, 実数 } y \in \mathbb{R} \text{ で, } x^2 + y^2 = 1 \text{ を満たすものが存在する}$$

という意味になる．そして命題 Q は

$$\text{実数 } y \in \mathbb{R} \text{ で, 任意の } -1 \leq x \leq 1 \text{ について } x^2 + y^2 = 1 \text{ を満たすもの存在する}$$

という意味となる．一見すると同じように見えるが, その違いは $y \in \mathbb{R}$ が x 依存で決めてよいかどうかにある．つまり, 命題 P では, x を先に決めてそれに依存して y を選んでもよかったが, 命題 Q では, y は x に無関係でなければいけないのである．

さて, 命題 P は真であり, 命題 Q は偽である．命題 P が真であることを示そう．そのためには, 任意の $a \in [-1, 1]$ を一つ取ったとき,「$\exists y \in \mathbb{R}$ (s.t.) $a^2 + y^2 = 1$」を証明すれば良い．そこで, $b = \sqrt{1 - a^2}$ とおくと, $b \in \mathbb{R}$ であり,

$$a^2 + b^2 = a^2 + 1 - a^2 = 1$$

となるから $y = b$ ととれば良いことがわかる．よって, 命題 P は真である．

次に命題 Q が偽であることを示そう．これは,「$\forall x \in [-1, 1]$, $x^2 + b^2 = 1$」を満たす $b \in \mathbb{R}$ が存在しないことを示せば良い．これを背理法で証明する．$b \in \mathbb{R}$ が「$\forall x \in [-1, 1]$, $x^2 + b^2 = 1$」を満たしている実数であると仮定すると, $x = 1$ のときでも, $x = 0$ のときでも $x^2 + b^2 = 1$ を満たしていることになる．$x = 1$ のときは, $b^2 = 0$ だから $b = 0$ である．一方, $x = 0$ のときは $b = \pm 1$ である．すなわち $b = 0 = 1 = -1$ となり, これは矛盾である．よって, 背理法の仮定は誤りなので「$\forall x \in [-1, 1]$, $x^2 + b^2 = 1$」を満たす $b \in \mathbb{R}$ が存在しない．つまり, Q は偽である．

以上の例からわかるように, $\forall$ と $\exists$ が混在するような命題では, その順番が大切なのである．

レポート 2-2 2 つの命題

$$\begin{aligned} P &: \forall x > 0,\ \exists y \in \mathbb{R} \ \ \text{(s.t.)} \ \ xy \geq 1, \\ Q &: \exists y \in \mathbb{R} \ \ \text{(s.t.)} \ \ \forall x > 0,\ xy \geq 1 \end{aligned}$$

について, これの真偽を判定せよ．

- **2-3: 全称命題と存在命題の否定**

集合 X を定義域とする全称命題「$\forall a \in X, P(a)$」の否定はどうなるか考えよう．これは, 任意の $a \in X$ に対して $P(a)$ が成り立つ, という意味であったからこれを否定すると「任意の $x \in A$ に対して, $P(a)$ が成り立つとは限らない」である．つまり, 集合 X の元 $a \in X$ で, $P(a)$ を満たさないものがある, ということであり, 言い換えれば「$a \in A$ で $\overline{P(a)}$ が成り立つものがある」ということである．これは存在命題として「$\exists a \in X$ (s.t.) $\overline{P(a)}$」とかける．以上により, 次が同値であることがわかった．

$$\overline{\forall a \in X, P(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in X \ \ \text{(s.t.)} \ \ \overline{P(a)}$$

ここで, 否定を考えるときに「任意の $x \in A$ に対して, $P(a)$ が成り立たない」では意味がまるっきり変わってしまうので, 間違えないようにしよう．実際これは,「$\forall a \in X$, $\overline{P(a)}$」と表される．

次に, 集合 X を定義域とする存在命題「$\exists a \in X$ (s.t.) $P(a)$」の否定はどうなるか考えよう．これは, ある $a \in X$ に対して $P(a)$ が成り立つようなものが存在する, という意味であったからこれを否定すると「どんな $a \in X$ に対しても $P(a)$ が成り立たない」である．全称命題として「$\forall a \in X$, $\overline{P(a)}$」とかける．以上により, 次が同値であることがわかった．

$$\overline{\exists a \in X \ \text{(s.t.)} \ P(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \in X, \ \overline{P(a)}$$

まとめておこう．

命題 2.1. 集合 X について, 次が成り立つ.

(1) $\overline{\forall a \in X, P(a)} \iff \exists a \in X \ \text{(s.t.)} \ \overline{P(a)}$
(2) $\overline{\exists a \in X \ \text{(s.t.)} \ P(a)} \iff \forall a \in X, \ \overline{P(a)}$

- **2-4: $\forall$ と $\exists$ が混在する命題の否定**

では, $\forall$ と $\exists$ が混在する命題の否定はどうなるだろうか. 再び命題として次の P を考えよう.

$$P : \forall x \in [-1,1], \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ \text{(s.t.)} \ \ x^2 + y^2 = 1$$

これの否定がどうなるか観察していこう. まず, $[-1,1]$ を定義域とする命題関数

$$A(x) : \exists y \in \mathbb{R} \ \ \text{(s.t.)} \ \ x^2 + y^2 = 1$$

を考えれば, 命題 P は全称命題「$\forall x \in [-1,1], \ A(x)$」とかける. 従って, **命題 2-1** (1) によって「$\overline{P} : \exists x \in [-1,1]$ (s.t.) $\overline{A(x)}$」である. 更に, **命題 2-1** (2) によって「$\overline{A(x)} : \forall y \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 \neq 1$」となる. 合わせると

$$\overline{P} : \exists x \in [-1,1] \ \ \text{(s.t.)} \ \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 \neq 1$$

であることがわかった.

レポート 2-3 以下で与えられる命題

$$\exists y \in \mathbb{R} \ \ \text{(s.t.)} \ \ \forall x \in [-1,1], \ x^2 + y^2 = 1$$

について, これの否定をとり, その真偽を判定せよ.