# 3 数学的帰納法と帰納的定義

**• 3-1：数学的帰納法の原理**

自然数全体 $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ があるとき, 無限個の命題 $P(1), P(2), P(3), \ldots$ が得られる. これら無限個の命題が真であることを証明したいとき, 命題をひとつひとつ検証していれば終わりがない. では, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $P(n)$ が真であることを証明するためにはどうすればよいだろうか. これに対するひとつの答えが数学的帰納法である.

**定理 3.1** (帰納法の原理)**.** 整数 $a \in \mathbb{Z}$ をとる. $\mathbb{Z}$ の部分集合 $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ が次の 2 条件を満たすとする.

(i) $P(a)$ は真である.

(ii) $k \in A$ について $P(k)$ が成り立つと仮定するとき, $P(k+1)$ は真である.

このとき, 全称命題「$\forall n \in A, P(n)$」は真である.

**証明.** 条件 (i), (ii) が成り立っているとする. 背理法を使って証明しよう. $A$ の部分集合 $M$ を

$$M := \{n \in A \mid P(n) \text{ は偽である. }\}$$

と定め, 背理法の仮定として $M \neq \varnothing$ であると仮定する.

$m$ を $M$ の元のなかで最小の整数とする. 条件 (i) より, $m > a$ であるから $m-1 \in A$ である. $m$ の最小性から $P(m-1)$ は真となる. このとき,

$$P(m) = P((m-1)+1)$$

であるから, 条件 (ii) より $P(m)$ は真となる. これは $m \in M$ に矛盾する. 以上で $M = \varnothing$ となり, 全称命題「$n \in A, P(n)$」は真である. □

条件 (i) を数学的帰納法の **第一段階**, 条件 (ii) を **第二段階** と呼ぶ.

**注意.** 帰納法の原理において $a = 1$ としたものが高校で学ぶ数学的帰納法であり, このとき, **定理 2.1** にある命題関数 $P(x)$ の定義域 $A$ は $\mathbb{N}$ となる.

**レポート 3-1**　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ を以下で定める.

$$P(x) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

このとき, 全称命題「$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$」を数学的帰納法を用いて証明せよ.

**• 3-2：累積帰納法**

数学的帰納法に基づき, $\mathbb{Z}$ の部分集合 $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ に関する全称命題「$\forall n \in A, P(x)$」を証明しようとするとき, 第一段階が $A$ に属する整数の最小値 $a$ だけでは不十分な場合がある. 具体例としてフィボナッチ数列の一般項に関する問題を考えよう. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 3)$$

で与えられるような数列を **フィボナッチ数列** と呼ぶ. これの一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

で与えられることを示すことを試みる．つまり, $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数

$$P(x) : a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3) \Longrightarrow a_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right)$$

について, 全称命題「$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$」が成り立つことを示す．

まず, $n = 1$ のときは

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1$$

より $P(1)$ は成り立つ．ところで, 「$P(1)$ が真であるので $P(2)$ が真である」がいえるだろうか．これは,「$a_1 = 1$ のとき $a_2 = 1$ であるか」ということである．しかし, これは無理がある．漸化式は $n \geq 3$ に対する関係式だから $a_2$ は個別で対応する必要があるのである．そこで, $n = 2$ のときを考えて,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = a_2$$

より $P(2)$ も成り立つ．次に, $P(k)$ $(k \geq 3)$ が真であると仮定しよう．このとき,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)\\
=&a_k + a_{k-1} = a_{k+1}
\end{aligned}$$

であるから, $P(k+1)$ も真である．

以上のように, 全称命題「$\forall n \in A, P(x)$」を証明を数学的帰納法で示そうとするとき, ある番号まですべて正しいとして次のステップが初めて示せる場合もある．このような帰納法を **累積帰納法** と呼ぶ．

**定理 3.2** (帰納法の原理 (2))**.** 整数 $a \in \mathbb{Z}$ をとる．$\mathbb{Z}$ の部分集合 $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ が次の 2 条件を満たすとする．

(i) $P(a)$ は真である．
(ii) $k \in A$ について, 全ての $a \leq m \leq k$ で $P(m)$ が成り立つと仮定するとき, $P(k+1)$ は真である．

このとき, 全称命題「$\forall n \in A, P(n)$」は真である．

**レポート 3-2**　$y \in \mathbb{R}$ を $y \neq 0$ とする．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義域とする命題関数 $P(x)$ を以下で定める．

$$P(x) : y + \frac{1}{y} \in \mathbb{N} \Longrightarrow y^x + \frac{1}{y^x} \in \mathbb{Z}$$

このとき, 全称命題「$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$」を数学的帰納法を用いて証明せよ．

## • 3-3 : 帰納的定義

自然数のような無限集合 $\mathbb{N}$ を厳密に定義する方法が「帰納的定義」である．集合 $A$ の帰納的定義とは, $A$ が以下のステップを踏んで得られる集合であるときをいう．

(I) はじめに, いくつかの要素は $A$ に属すると定める．これらの要素を **基礎** という．

(II) $A$ に属する要素を用いて, 新たに $A$ に属する要素を決定する規則を定める．この規則を **帰納** と呼ぶ．

(III) $A$ の要素は, (II) で定められる規則を施して得られるもののみであると定める．このルールを **限定句** と呼ぶ．

顕著な例が「自然数全体の集合 $\mathbb{N}$」である．

**定義 3.3.** 集合 $N$ と記号 $(-)'$ および記号 1 の組 $(N, 1, (-)')$ で決まる以下の規則を **Peano の公理** と呼ぶ．

(P1) $1 \in N$.

(P2) $\forall x \in N,\ x \in N \Longrightarrow x' \in N$.

(P3) $\forall x, y \in N,\ x' = y' \Longrightarrow x = y$.

(P4) $\forall x \in N,\ x' \neq 1$.

(P5) 「$P(1) \land [\ \forall k \in N,\ P(k) \Longrightarrow P(k')\ ]$」$\Longrightarrow \forall x \in N,\ P(x)$.

$x \in N$ に対して, $x'$ を $x$ の **後続数** と呼ぶ．

Peano の公理によって帰納的に定義される集合 $N$ が「自然数全体」である．Peano の公理 (P1) から (P5) の意味を確認しよう．

(P1) 「$1 \in N$」はそのまま 1 は $N$ に属する, ということである．

(P2) 任意の $x \in N$ について, $x \in N$ ならば $x$ の後続数 $x'$ も $N$ に属する．このとき, (P1) から $1 \in N$ なので,

$$1, \quad 1', \quad 1'', \quad 1''', \ldots$$

はすべて $N$ に属する．後続数の推移をわかりやすく絵でかいて以下のように表そう．

$$1 \longrightarrow 1' \longrightarrow 1'' \longrightarrow 1''' \longrightarrow \cdots$$

(P3) $x$ と $y$ が異なれば, これらの後続数 $x'$, $y'$ は異なる $N$ の要素である．条件 (P3) を外した場合, 様々な不都合が生じる．例えば, 後続数の推移にサイクルが生じてしまう可能性があるだろう．具体的に, $1'$ と $1''''$ が等しいとすると,

$$\begin{tikzcd}
 & 1'''' \arrow[d] & 1''' \arrow[l] \\
1 \arrow[r] & 1' \arrow[r] & 1'' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

となる．これでは, $N = \{1, 1', 1'', 1''', 1''''\}$ となり自然数を定義するには不都合である．また, サイクルでなくとも合流の可能性も考えられる．例えば, $1'$ が別の $x$ の後続数にもなっているときは, 推移は次のような可能性もありうる．

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & 1' \arrow[r] & 1'' \arrow[r] & 1''' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(P4) 1 を後続数にもつ $N$ の要素は存在しない．つまり, 1 は $N$ の先頭にあるといえる．これは次のような可能性を排除していると言える:

$$\cdots \longrightarrow 1 \longrightarrow 1' \longrightarrow 1'' \longrightarrow 1''' \longrightarrow \cdots$$

(P5) これは数学的帰納法について述べている．つまり, 集合 $N$ を定義域とする全称命題「$\forall n \in N,\ P(n)$」の証明法を述べている．

Peano の公理は $N$ の帰納的定義を与えている．条件 (P1) が「基礎」の部分であり, 条件 (P2) が「帰納」の部分である．(P3), (P4), (P5) が「限定句」に相当する．集合 $N$ において, $x$ の後続数 $x'$ がいわゆる「$x+1$」に相当する．つまり集合 $N$ は, まず 1 があり, 1 の後続数 $1'$ があって, これはいわゆる「1+1」であり, その後続数 $1''$ があって, これがいわゆる「$1+1+1$」であり, という風に続く．そこで, $1'$ を 2 と書き, $1''$ を 3 と書き, という風に我々の知っている自然数の記号を用いて表すことにする．つまり,

$$1^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime\prime}^{n}} =: n$$

と表せば, 自然数が定義されたことになる．