0 集合, 写像, 論理と証明

• **0-1：集合**

条件がはっきりとしているようなものの集まりを **集合** といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを **元** または **要素** という. 「条件がはっきりしている」というのは, 集合の元であるという条件がきっちりと明示されているということである. 集合を表す記号を表にまとめておこう. 以下の表では A と B は集合とする.

記号	日本語	意味
$a \in A$	a は集合 A に属する	a は集合 A の元である.
$a \notin A$	a は集合 A に属さない	a は集合 A の元ではない.
$A \subset B$	A は B の部分集合	A の元はすべて B にも属している.
$A \not\subset B$	A は B の部分集合ではない	$A \subset B$ ではない.
$A \subseteq B$	A は B の部分集合, または $A = B$	$A \subset B$ もしくは $A = B$ のいずれかである.
$A \subsetneq B$	A は B の真の部分集合	$A \subset B$ かつ $A \neq B$ である.
$\varnothing$	空集合	元がひとつもない集合
$A \cap B$	A と B の共通部分	A と B の両方に属するもの全体の集合
$A \cup B$	A と B 和集合	A と B の少なくとも一方には属するもの全体の集合
$\overline{A}$	A の補集合	全体集合 U の元のうち, A に属さないもの全体の集合

数学では, 特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i$ は虚数単位 $\}$ = 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

2 つの空でない集合 A, B が与えられたとき, A の元 a と B の元 b の組 (a, b) の全体を $A \times B$ 考えることができる.

$$A \times B = \Big\{ (a,\, b) \mid a \in A,\, b \in B \Big\}$$

これを A と B の **直積集合** という. A もしくは B が空集合のときは $A \times B$ も空集合と約束する. また, $A = B$ のときは $A \times B$ を A^2 とかく. 同様にして帰納的に A^n を

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

と定義する.

例 0-1 実数 $\mathbb{R}$ の直積集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は平面を表し, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は 3 次元空間を表す.

集合を元とするような集合のことを **集合族** という. 集合族の代表的な例は冪集合である. 集合 A に対して, その部分集合全体からなる集合を A の **冪集合** といい, 記号で $P(A)$ や 2^A などとかく. 集合 A が n 個の元からなる場合, 2^A は 2^n 個の元からなる.

例 0-2 $A = \left\{1,\, 2,\, 3\right\}$ のときは

$$2^A = \left\{\varnothing,\, \left\{1\right\},\, \left\{2\right\},\, \left\{3\right\},\, \left\{1,\, 2\right\},\, \left\{1,\, 3\right\},\, \left\{2,\, 3\right\},\, \left\{1,\, 2,\, 3\right\}\right\}$$

である.

集合族 $\mathcal{S}$ に対して, その共通部分 $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A$ と和集合 $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$ が次のように定義される.

$$\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \left\{x \mid \text{すべての } A \in \mathcal{S} \text{ に対して, } x \in A\right\}, \qquad \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = \left\{x \mid \text{ある } A \in \mathcal{S} \text{ に対して, } x \in A\right\}$$

$\mathcal{S} = \left\{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\right\}$ のときは,

$$\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \qquad \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

などとかく. $\mathcal{S} = \left\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ のときは, $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とかく.

集合 X とその部分集合 A に対して, $X \setminus A$ を

$$X \setminus A = \left\{x \in X \mid x \notin A\right\}$$

とおき, これを X から A への **差集合** と呼ぶ. 次の集合に関する等号を **de Morgan の法則** と呼ぶ.

定理 0.1 (de Morgan の法則)**.** 集合 X とその部分集合 A, B に対して次が成り立つ.

(1) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

• 0-2 : 写像

空でないような 2 つの集合 A, B に対して, A に属する各々の元に対して B の元をただ一つずつ対応させる規則を A から B への **写像** という. f が A から B への写像であって, $a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき

$$f : A \longrightarrow B; \quad a \longmapsto b$$

のようにかく. 写像 f によって, $a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき, a は f によって b に **写される** という. A の部分集合 A' に対して, A' の元を f で写したもの全体からなる B の部分集合を $f(A')$ で表し, A' の f による **像** という. つまり,

$$f(A') := \{f(a) \in B \mid a \in A'\}$$

である. また, B の部分集合 B' に対して, $f(a) \in B'$ となるような $a \in A$ の全体からなる A の部分集合を B' の f による **逆像** といい, 記号で $f^{-1}(B')$ で表す. つまり,

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

である. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき, $x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ を対応させることにより, 新たな写像を定義できる. これを $g \circ f : X \longrightarrow Z$ と表し, f と g の **合成写像** という.

写像 $f : A \longrightarrow B$ が **単射** または **1:1** であるとは, A の異なる 2 つの元が f によって B の異なる 2 つの元に写されるときをいう.

写像 $f: A \longrightarrow B$ が **全射** または **上への写像** であるとは, B に属するどの元も A に属するある元の f による像となっているときをいう．言い換えれば, $f(A) = B$ ということである．

写像 $f: A \longrightarrow B$ が単射かつ全射であるとき **全単射** という．

例 0-3 (1) 写像 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める．これは $f(1) = f(-1) = 1$ だから単射はない．また, $f(x) = -1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ は存在しないの全射でもない．

(2) 写像 $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $f(n) = 3n$ で定義する．$n \neq m$ のとき, $3n \neq 3m$ だから f は単射である．また, $f(n) = 1$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない．

(3) 写像 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $f(n) = 2n$ で定義すると, これは全単射である．

(4) 集合 X に対して, 写像 $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ を $\mathrm{id}_X(x) = x$ と定めたものを X 上の **恒等写像** という．恒等写像は明らかに全単射である．

全単射な写像 $f: A \longrightarrow B$ があったとする．このとき, f は全射だから任意の $y \in B$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する．f は単射であるから $y = f(x)$ となるような x はただひとつに定まる．そこで写像 $g: B \longrightarrow A$ を $y \in B$ に対して $y = f(x)$ となるような $x \in A$ をとり $g(y) = x$ と定義することができる．このように定義した写像 g を f の **逆写像** といい, f^{-1} で表す．f^{-1} は「エフインバース」と読む．

● 0-3： 命題

数学的な **主張** とは, 数や図形などの数学的な対象について, いくつかの基本的な接続しと述語, 演算記号, 文字などを用いて記述される「曖昧さ」のない文章のことをいう．基本的な接続詞とは, 「ならば」「または」「かつ」「である」「ではない」「存在する」などの論理的な文章でよく用いられる言葉を指す．演算記号とは, 「=」「<」「+」などの数学でよく使われる記号を指す．数学的な主張が **命題** であるとは, その主張が正しいのかそうでないのかがはっきりと定まっているときをいう．ある命題 P が正しい主張であるとき, P は **真 (true)** であるといい, P が正しくない主張であるとき．P は **偽 (false)** であるという．命題 P の真偽を **真理値** と呼び, 真を記号 T で, 偽を記号 F で表す．

例 0-4 (1) 主張「平行四辺形は正方形である」は命題であり, その真理値は F である．

(2) 主張「n が奇数ならば $n^2 - 1$ は 8 の倍数である」は命題であり, その真理値は T である．

(3) 主張「10000 はとても大きい」は曖昧なので, そもそも主張ではない．

(4) 主張「n は偶数であり, かつ, 100 より小さい」は n が特定されていないので, 正しいか正しくないかが定まらないから命題ではない．

● 0-4： 命題関数

さて, **例 0-4** (4) は命題ではないが, n に具体的な値を代入すれば命題になる．例えば, $n = 6$ とすれば, 「6 は偶数であり, かつ, 100 より小さい」は真理値が T の命題である．一般に, 文字 x を引数にもつ主張 $P(x)$ について, x に具体的な値 a を代入した $P(a)$ の真理値が定まるとき, $P(x)$ を **条件** または **述語** という．述語 $P(x)$ の引数 x が集合 X の範囲で取れるとき, $P(x)$ は写像

$$P(x): X \longrightarrow \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$$

とみなせるので, これを **ドメインを X とする命題関数** と呼ぶ．変数は x である必要はなく, 好きな文字を用いても構わない．一方, 同じ条件であっても, ドメインが異なる命題関数は異なる命題関数と考える．例えば, $P(x): 3x + 7 < 22$ のドメインとして, 実数全体 $\mathbb{R}$ を採用する命題関数と整数全体 $\mathbb{Z}$ を採用する命題関数は異なる命題関数である．

例 0-5 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ をドメインに持つ命題関数

$$P(n): n \text{ は } 100 \text{ 以下の偶数である.}$$

について, $P(6) = \mathsf{T}$, $P(13) = \mathsf{F}$, $P(200) = \mathsf{F}$ である.

- **0-5： 限量子**

集合 X を定義域とする命題関数 $P(x)$ が与えられたとき, 次のような命題を考えることができる.

(i) すべての $a \in X$ について $P(a)$ が成り立つ.
(ii) ある $a \in X$ が存在して, $P(a)$ が成り立つ.

(i) の形の命題を **全称命題** と呼び, (ii) の形の命題を **存在命題** と呼ぶ. 全称命題と存在命題は記号を用いて次のように表される.

- 全称命題「すべての元 $a \in X$ について $P(a)$ は真である」ことを「$\forall\ a \in X,\ P(a)$」と書く. 「すべての...」は **全称限量子** といい, 記号 $\forall$ は「すべての」という意味であり, **全称記号** と呼ばれる.
- 存在命題「ある $a \in X$ で, $P(a)$ が真となるようなものが存在する」ことを, 「$\exists\ a \in X$ (s.t.) $P(a)$」と書く. ここで, (s.t.) は such that の省略形である. 「ある... が存在して〜」は **存在限量子** と呼ばれる. 記号 $\exists$ は「ある」「存在する」の意味の記号であり, **存在記号** と呼ばれる. 存在記号 $\exists$ は単体で用いることはできず, (s.t.) とセットで用いる. [*1]

例 0-6 全称記号と存在記号を使った命題の例をみてみよう.

(1) 命題「$\forall n \in \mathbb{N},\ n > -1$」は「すべての自然数 n について, $n > -1$ である」という意味となる. この命題の真理値は T である.
(2) 命題「$\exists y \in \mathbb{Z}$ (s.t.) $(4-y)^2 = 4$」は「ある整数 y が存在して, $(4-y)^2 = 4$ を満たす」という意味になる. $y = 2$ ととればよいから, この命題の真理値は T である.
(3) 命題「$\forall r \in \mathbb{R},\ \dfrac{r}{2} \in \mathbb{Q}$」は「すべての実数 r について, $\dfrac{r}{2}$ は有理数である」という意味となる. $r = \sqrt{2}$ ととれば $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ なので, この命題の真理値は F である. 全称記号で修飾された変数をもつ述語は, そのドメインに属するすべての元に対して真であるときのみ, 真理値が T になるので, 一つでも偽となる例があれば, 全体の真理値は F となる. このような例を **反例** という.

命題のなかには, $\forall$ と $\exists$ が混在する場合もある. 例えば, 次のような 2 つの命題を考えてみよう.

$$P: \forall x \in [-1,1],\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ (\text{s.t.})\ \ x^2 + y^2 = 1,$$
$$Q: \exists y \in \mathbb{R}\ \ (\text{s.t.})\ \ \forall x \in [-1,1],\ x^2 + y^2 = 1.$$

この 2 つの命題は, 互いに $\forall$ と $\exists$ の位置を入れ替えて得られる命題であるが, その内容は大きく異なる. これらを言明すると

- P: すべての $-1 \le x \le 1$ に対して, ある実数 $y \in \mathbb{R}$ で, $x^2 + y^2 = 1$ を満たすものが存在する.
- Q: ある実数 $y \in \mathbb{R}$ で, 任意の $-1 \le x \le 1$ について $x^2 + y^2 = 1$ を満たすもの存在する.

となる. 命題 P は, 任意の $x \in [-1,1]$ に対して, $y = \sqrt{1-x^2}$（あるいは $y = -\sqrt{1-x^2}$ でもよい）を取れば, $x^2 + y^2 = 1$ を満たすので, 真理値は T である. 一方, 命題 Q では y としてどのような実数を選んでも反例が

[*1] (s.t.) を省略して, $\exists x \in X,\ P(X)$ と書かれる場合もあるが, 初学者のうちは「$\forall x \in X,\ P(x)$」と混同しがちなので, 省略しないことをおすすめする, 例えば, 関数 f が点 a で連続であることの定義は

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta > 0,\quad \forall x,\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

で表されるが, このように記号が混在すると読みづらくなる場合がある.

存在するので, その真理値は F である．このように, 全称記号と存在記号は順序が異なると全く意味が異なる命題となる．

- **0-6：否定**

ある命題 P に対して, 「P ということではない」という命題を P の **否定** といい, 記号で $\overline{P}$ や $\neg P$ で表す．命題の否定に関しては, 次の **排中律** を根底としている．

（排中律） 命題 P とその否定 $\overline{P}$ のどちらかが一方が真であり, 同時に真とならない．

排中律によって, P の真理値と $\overline{P}$ の真理値は必ず逆転する．表 1 は, 元の命題 P の真理値に対する $\overline{P}$ の真理値をまとめたものであるが, このように元の命題とそれから生まれる新しい命題の真理値をまとめた表を **真理値表** という．

P	$\overline{P}$
T	F
F	T

表 1　否定の真理値表

では, 全称記号や存在記号を含むような命題の否定について検討してみよう．集合 X をドメインとする命題関数「$\forall a \in X, P(a)$」は, 任意の $a \in X$ に対して $P(a)$ が成り立つ, という意味であったからこれを否定すると「任意の $a \in X$ に対して, $P(a)$ が成り立つとは限らない」である．つまり, ある $a \in X$ で, $P(a)$ を満たさないものがある, ということであり, 言い換えれば「$a \in X$ で $\overline{P(a)}$ が成り立つものがある」ということである．これは存在記号を使って「$\exists a \in X$ (s.t.) $\overline{P(a)}$」とかける．

ここで, 否定を考えるときに「任意の $x \in A$ に対して, $P(a)$ が成り立たない」では意味がまるっきり変わってしまうので, 間違えないようにしよう．実際これは, 「$\forall a \in X, \overline{P(a)}$」と表される．

次に, 集合 X を定義域とする存在命題「$\exists a \in X$ (s.t.) $P(a)$」の否定はどうなるか考えよう．これは, ある $a \in X$ に対して $P(a)$ が成り立つようなものが存在する, という意味であったからこれを否定すると「どんな $a \in X$ に対しても $P(a)$ が成り立たない」である．これは全称記号を使って「$\forall a \in X,\ \overline{P(a)}$」とかける．

以上をまとめておこう．

命題 0.2. 集合 X について, 次が成り立つ．

(1) 命題 $\overline{\forall a \in X, P(a)}$ と命題 $\exists a \in X$ (s.t.) $\overline{P(a)}$ は等価である．
(2) 命題 $\overline{\exists a \in X \text{ (s.t.) } P(a)}$ と命題 $\forall a \in X,\ \overline{P(a)}$ は等価である．

例 0-7 (1) 命題 P「彼は, 全ての科目の期末試験の点数が 80 点以上である」の否定 $\overline{P}$ を考えると, 「彼は, 全ての科目の期末試験の点数が 80 点未満である」とはならない．正しくは「ある科目の期末試験の点数が 80 点未満である」となるのである．

(2) 次の命題

$$P:\ \ \forall x \in [-1,1],\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ \text{(s.t.)}\ \ x^2+y^2=1$$

の否定は, 命題 0.2 より $\overline{P}$: $\exists x \in [-1,1]$ (s.t.) $\forall y \in \mathbb{R},\ \overline{x^2+y^2=1}$ となる．最後の $\overline{x^2+y^2=1}$ は $x^2+y^2 \neq 1$ ということなので, $\overline{P}$ は

$$\overline{P}:\ \ \exists x \in [-1,1]\ \ \text{(s.t.)}\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \neq 1$$

となることがわかる．

- **0-7：選言と連言**

2 つの命題 P, Q に対して, 以下で定まる新たな命題を考えることができる．

（選言） $P \vee Q$：命題 P または命題 Q が成り立つ（P or Q）．
（連言） $P \wedge Q$：命題 P かつ命題 Q が成り立つ（P and Q）．

選言 $P \vee Q$ は, P と Q の少なくとも一方が真となるときに限って真となる．例えば, P が偽でも Q が真なら $P \vee Q$ は真である．また, 連言 $P \wedge Q$ は P と Q が共に真となるときに限って真となる．

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 2　選言の真理値表

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 3　連言の真理値表

例 0-8　ドメインを $\mathbb{Z}$ とする 2 つの命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ を考える:

$$P(x):\ x \text{ は素数である} \qquad Q(x):\ x \text{ を } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}.$$

このとき, $P(3) \vee Q(3)$ の真理値は T であり, $P(3) \wedge Q(3)$ の真理値は F である．また, $P(7) \vee Q(7)$ と $P(7) \wedge Q(7)$ の真理値は共に T であり, $P(15) \vee Q(15)$ と $P(15) \wedge Q(15)$ の真理値は共に F である．

選言や連言の否定はどうなるだろうか．命題 P を「彼は東京大学に合格した」とし, 命題 Q を「彼は京都大学に合格した」としてみよう．選言 $P \vee Q$ と連言 $P \wedge Q$ の否定は

- $\overline{P \vee Q}$:　彼は東京大学か, 京都大学に合格した, というわけではない．
- $\overline{P \wedge Q}$:　彼は東京大学と京都大学に合格した, というわけではない．

となる．これを以下のように**間違った解釈**をしてはいけない．

- $\overline{P \vee Q}$:　彼は東京大学か, 京都大学に不合格であったのどちらかだ．
- $\overline{P \wedge Q}$:　彼は東京大学と京都大学に不合格であった．

実際, $\overline{P \vee Q}$ および $\overline{P \wedge Q}$ の真理値表は表 4, 表 5 のようになるからである．

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

表 4　選言の否定の真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

表 5　連言の否定の真理値表

すなわち,「東京大学と京都大学の両方に不合格」のときのみ $\overline{P \vee Q}$ は真であり,「東京大学か京都大学のどちらかが不合格」のときに $\overline{P \wedge Q}$ は真となる．つまり, 正しい解釈は次のようになる．

- $\overline{P \vee Q}$:　彼は東京大学と京都大学に不合格であった．
- $\overline{P \wedge Q}$:　彼は東京大学に不合格であったか, 京都大学に不合格であったのどちらかだ．

以上の考察を基に, 一般の場合は次の de Morgan の法則が成り立つ．

定理 0.3 (de Morgan の法則)**.** 命題 P, Q に対して, 次の 2 つが成り立つ．

(1) 命題 $\overline{P \vee Q}$ と命題 $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ は等価である．

(2) 命題 $\overline{P \wedge Q}$ と命題 $\overline{P} \vee \overline{Q}$ は等価である.

証明. 命題 P, Q に対して, 以下の真理値表を考える.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q}$
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

これより, 命題 $\overline{P \vee Q}$ と命題 $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ は等価であり, 命題 $\overline{P \wedge Q}$ と命題 $\overline{P} \vee \overline{Q}$ は等価である. □

- **0-9 : 含意**

「任意の自然数 n に対して, n が素数ならば, n は奇数である」という全称命題は, 「n が素数ならば」という仮定の下で「n は奇数である」という結果の真偽を問うている. このように, P ならば Q であるという形からなっている命題を **含意** といい記号で $P \Longrightarrow Q$ と表す. 含意 $P \Longrightarrow Q$ の P の部分を **条件**, Q の部分を **結論** という.

含意の真理値表は表 6 で与えられる. ではなぜこのように定義されるかについて検討してみよう. そのために、次のような条件が付いている命題を考えてみることにする.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 6　含意の真理値表

(A) 期末試験で 70 点以上取ったならば, 離散数学 2 は合格する.

これに対して, P, Q を次のように設定する.

- P: 期末試験で 70 点以上取る.
- Q: 離散数学 2 に合格をする.

このとき, P, Q のそれぞれの真偽に対して次の 4 パターンが考えられる.

(i) P が T, Q が T のとき.
この場合は, 期末試験で 70 点以上とり, 離散数学 2 も合格できているので, (A) は疑いようもなく正しいことがわかる.

(ii) P が T, Q が F のとき.
この場合は, 期末試験で 70 点以上取っているにも関わらず, 離散数学 2 は不合格であることになる. これでは (A) が正しくなかったということになる.

(iii) P が F, Q が T のとき.
この場合は, 期末試験で 70 未満しか取れなかったが, 離散数学 2 も合格したという状態となる. 期末試験で 70 点以上とると離散数学 2 は合格するとは述べているが, 期末試験で 70 点未満の場合については言及しておらず, 他の何らかの理由があって離散数学 2 を合格しただけであり, (A) が間違っているとはいえない. 従って, (A) は正しいといえる.

(iv) P が F, Q が F のとき.
この場合は, 期末試験で 70 点未満しか取れず, 離散数学 2 が不合格であるとすれば, それは (A) と矛盾するところがないため正しいと言える.

以上によって, 含意 $P \Longrightarrow Q$ の真理値は, P の真偽に関わらず Q が偽のときのみ偽となるように定めるのが妥当である.

次に含意の否定について考察してみよう．含意の真理値表より，$\overline{P \Longrightarrow Q}$ の真理値表は表 7 のようになることがわかる．つまり，P が真であり，Q が偽のとき，言い換えれば，P と $\overline{Q}$ が共に真のときに限って，$\overline{P \Longrightarrow Q}$ は真である．従って，$\overline{P \Longrightarrow Q}$ は $P \wedge \overline{Q}$ と等価であることがわかった．例えば，(A) の否定は，「期末試験で 70 点以上取ったならば，離散数学 2 は合格する，というわけではない」ということであるが，これは「期末試験で 70 点以上取った」としても「 離散数学 2 は不合格」となり得るという意味である．まとめておこう．

P	Q	$\overline{P \Longrightarrow Q}$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

表 7　含意の否定の真理値表

命題 0.4. 命題 P, Q に対して，$\overline{P \Longrightarrow Q}$ は $P \wedge \overline{Q}$ は等価である．

- **0-10 : 同値**

含意命題 $P \Longrightarrow Q$ が真であるとき，P は Q であるための **十分条件** といい，Q は P であるための **必要条件** であるという．含意命題 $P \Longrightarrow Q$ に加えて，$Q \Longrightarrow P$ も真であるとき，P は Q であるための必要条件であり，かつ十分条件であるので，P は Q であるための **必要十分条件** であるという．このとき，記号で「$P \Longleftrightarrow Q$」で表し，P と Q は **同値** であるという．

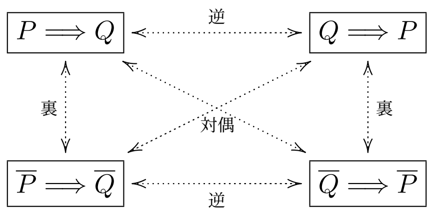
P と Q が同値であるのは，命題 $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ が真となるときなので，$P \Longleftrightarrow Q$ の真理値表は表 8 のようになる．従って，$P \Longleftrightarrow Q$ が真となるのは，P と Q の真偽が一致したときに限ることがわかる．

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

表 8　同値の真理値表

- **0-11 : 逆, 裏, 対偶**

含意命題 $P \Longrightarrow Q$ に対して，命題「$Q \Longrightarrow P$」をもとの命題の **逆**, 命題「$\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$」をもとの命題の **裏**, 命題「$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$」をもとの命題の **対偶** という．



定理 0.5. 命題 P, Q に対して，含意命題 $P \Longrightarrow Q$ とその対偶 $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ は同値である．

証明. 命題 P, Q に対して，$P \Longrightarrow Q$ の真理値表と $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ の真理値表を比較すれば良い．

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T

真理値表より，$P \Longrightarrow Q$ の真理値と $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ の真理値は完全に一致するので同値である．　□

定理 0.5 より, 含意命題 $P \Longrightarrow Q$ を証明するには, $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ を証明すれば良いことがわかった.

例 0-9　$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の命題を考える.

$$a + b > 0 \Longrightarrow (a > 0) \wedge (b > 0)$$

まず, この命題の真理値は F である. 実際, 反例として $a = 3$, $b = -2$ をとればよい.

- この命題の逆は, $(a > 0) \wedge (b > 0) \Longrightarrow a + b > 0$ である. これの真理値は明らかに T である.
- この命題の裏は, $a + b \leq 0 \Longrightarrow (a \leq 0) \vee (b \leq 0)$ である. これは, もとの命題の逆の対偶に相当するので, 定理 0.5 によって真理値は T である.
- この命題の対偶は, $(a \leq 0) \vee (b \leq 0) \Longrightarrow a + b \leq 0$ である. これはもとの命題の対偶に相当するので, 真理値は F である.

レポート 0-1 集合 X と集合 Y を以下のように定める．このとき, 以下の問に答えよ．

$$X := \{u, v\}, \quad Y = \{v, w, x\}$$

(1) 2^X を答えよ．
(2) 直積集合 $X \times Y$ を答えよ．
(3) 集合 $(X \cup Y) \setminus X$ を答えよ．

レポート 0-2 それぞの写像について, （ア）（イ）（ウ）（エ）（オ）に当てはまるものを一つ選べ．

(1) 写像 $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ を

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]; \quad x \longmapsto \cos(x)$$

と定めれば, f は（　ア　）である．

(2) 写像 f が 3 進法で表示された 0 以上の整数を 2 進法の表示に変換する写像であるとき, f は（　イ　）である．

(3) 成分が実数であるサイズが 2×2 の正則行列全体の集合を M とする．すなわち,

$$M := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ A \text{ は正則行列} \right\}$$

とおく．このとき,

$$\mathsf{det} : M \longrightarrow \mathbb{R}; \quad A \longmapsto \mathsf{det}(A)$$

は（　ウ　）である．ただし, $\mathsf{det}A$ は A の行列式を表す．

(4) 写像 f を

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \{\ell_\theta \mid \ell_\theta \text{ は}, xy \text{ 平面における原点を通り, 傾きが } \tan\theta \text{ の直線 }\}$$

と定めれば, f は（　エ　）である．

(5) 写像 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}; \quad (a, b) \longmapsto \frac{a}{b}$$

と定めれば, f は（　オ　）である．

レポート 0-3 次の命題の真理値とその命題の否定を表したものの組合せとして適切なものを答えよ．

(1) $\forall r \in \mathbb{R},\ r$ は複素数である．
(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N}$ (s.t.) $mx > y$.
(3) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
(4) a, b, c は実数とする．$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Longrightarrow a = b = c$.
(5) $(x + y > 0) \wedge (xy > 0) \Longrightarrow (x > 0) \wedge (y > 0)$.

レポート 0-4 それぞれの文について, （ア）（イ）（ウ）に当てはまるものを一つ選べ．

(1) 実数 x, y, z に対して, $x + 2y + z^2 = 0$ は $x = y = z = 0$ であるための（　ア　）．
(2) 整数 n について, $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であることは, n が奇数であうための（　イ　）．
(3) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$b < 0$ であることは, $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつための（　ウ　）．

演習問題 0-1　de Morgan の法則（定理 0.1）を証明せよ.

演習問題 0-2　以下のうち, 写像を定めているものはどれか. 写像である場合には, 単射, 全射, 全単射であるかを判定せよ. 写像でないものについては, その理由を述べよ.

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto x^3 + 3$
(2) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad n \longmapsto n$ を 3 で割った余り
(3) $f : \{\mathrm{A,B,O,AB}\} \longrightarrow \{$ 日本に住む人 $\}; \quad x \longmapsto$ 血液型が x の人
(4) $f : \{$ ジョーカーを除く 52 枚のトランプカード $\} \longrightarrow \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}; \quad x \longmapsto$ カード x のスート

演習問題 0-3　次の主張は命題か判定しなさい. 命題の場合は真偽を確かめなさい.

(1) 10 進法で $1 + 1 = 3$ である.
(2) 2025 年度の共通テストは, 簡単であった.
(3) $-2x + 5y = 1$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する.
(4) 二等辺三角形の各頂点から降ろした対辺への垂線は, 必ずその角を二等分する.
(5) x は素数であり, 偶数ではない.

演習問題 0-4　次の表現の意味を説明し, その真理値を示せ. また, それぞれの否定はどのような形になるか.

(1) $\exists y \in \mathbb{Z}$ (s.t.) $\forall x \in \mathbb{Z}, x + y = x.$
(2) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}$ (s.t.) $x + y = 0.$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ (s.t.) $xy = 1.$

演習問題 0-5　n はある自然数であるとする. 次の命題を否定を, それと同じ内容を持つわかりやすい文章の命題に書き換えよ.

(1) n は 2 の倍数であり, かつ, 100 より小さい.
(2) $n = \pm 2$ である.

演習問題 0-6　P, Q, R を命題とする. このとき, 適当な真理値表を組み立てることによって以下の命題を証明せよ.

(1) $P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ は等価である.
(2) $\overline{P \vee Q} \vee (\overline{P} \wedge Q)$ と $\overline{P}$ は等価である.
(3) $P \Longrightarrow Q$ と $\overline{P} \vee Q$ は等価である.

演習問題 0-7　以下の（　　）に入る最も適切な言葉を以下のうちから選び, その理由を述べよ.
$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, P, Q を次のように定める. このとき, P は Q であるための（　　）.

(P) $(x = 0) \wedge (y = 0)$
(Q) $x^2 + y^2 = 0$

(a) 必要条件であるが十分条件ではない.
(b) 十分条件であるが必要条件ではない.
(c) 必要十分条件である.
(d) 必要条件でも十分条件でもない.

演習問題 0-8　実数が成分の 2×2 行列 A, B に対して, 命題「$A = B = O \Longrightarrow AB = O$」の逆, 裏, 対偶を書き, それぞれの真理値を求めよ. ここで, O は零行列を表す.