1 可算集合

- **1-1：数え上げ**

次のような問題を考えてみよう.

> m, n を自然数とする. 不等式
>
> $$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n \qquad \cdots\cdots ①$$
>
> を満たす非負整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ の個数と, 不等式
>
> $$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq m \qquad \cdots\cdots ②$$
>
> を満たす非負整数の組 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の個数は一致することを示せ.

例 1-1 $m = 2$, $n = 3$ とする. このとき, 不等式

$$x_1 + x_2 \leq 3 \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たす非負整数の組 (x_1, x_2) の個数と, 不等式

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

を満たす非負整数の組 (y_1, y_2, y_3) の個数が等しいことを確認してみよう. 不等式 ③ を満たす非負整数の組 (x_1, x_2) を列挙すると

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,0),\ (0,2),\ (3,0),\ (0,3)$$

の 10 個である. 一方, 不等式 ④ を満たす非負整数の組 (y_1, y_2, y_3) を列挙すると

$$(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1),\ (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2)$$

であり, やはり 10 個である. よって, この場合は数が一致することが確かめられた.

数が具体的ならば, すべての解を列挙すれば原理的には一致することを確認することができる. しかし, 一般の自然数 m, n に対して, 不等式 ① を満たす非負整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と不等式 ② を満たす非負整数の組 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を漏れなく重複なく列挙するのは至難の業である. 従って, この問題を解決するには「列挙して数える」とは違うアプローチが必要になる. では, 不等式 ①, ② の非負整数解を別の視点から捉え直し, それらの数が一致することを示してみよう.

まず, $m+1$ 個の白玉 ○ と $n+1$ 個の黒玉 ● を用意する. これを, 右端が ○, 左端が ● となるように一列に並べる. 例えば, $m = 2$, $n = 3$ の場合は, 3 個の ○ と 4 個の ● を

○●●○●○●

はひとつの並べ方である. これを **左端から順に現れる ○ の間にある ● の数を数える** と, 今の場合は「2 個, 1 個」なので, これを $(2, 1)$ と表しておく. 次に, **右端から順に現れる ● の間にある ○ の数を数える** と, 今の場合は「1 個, 1 個, 0 個」なので, これを $(1, 1, 0)$ と表しておく. このとき, $(2, 1)$ は不等式 ③ の非負整数解であり, $(1, 1, 0)$ は不等式 ④ の非負整数解となっていることに気づく. つまり, この玉の 1 つの並びに対して, 不等式 ③ と ④ の非負整数解が同時に得られたことになり, 更に並びを変えれば異なる非負整数解を得る.

一般に, $m+1$ 個の ○ と $n+1$ 個の ● を, 右端が ○, 左端が ● となるように一列に並べたとき,

- 左端から順に現れる ○ の間にある ● の数を順に $x_1, x_2, \ldots, x_m$ とし,
- 右端から順に現れる ● の間にある ○ の数を順に $y_1, y_2, \ldots, y_n$

とすれば, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ は不等式 ① の非負整数解であり, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ は不等式 ② の非負整数解である．更に, 並びを変えれば異なる非負整数会を得ることができる．その原理は次の通りである．左端が ○ の玉の並びを考えると, ○ は $m+1$ 個あるので, 2 つの ○ の間は全部で m 個ある．それぞれの ○ の間には ● が入るが, 右端は ● で固定されているので挟める ● の数は高々 n 個となる．これは, 2 つの ○ が挟む ● の数のペアが不等式 ① の解であることを表す．不等式 ② に関しても同様であるため, 玉の並びから与えられた不等式の解を同時に得ることができるのである．

これによりわかったことは, 不等式 ① の 1 つの非負整数解と 1 つの玉の並びと不等式 ② の 1 つの非負整数解が対応づいたことになる．

$$\text{不等式 ① の非負整数解} \quad \longleftrightarrow \quad \text{玉の並び} \quad \longleftrightarrow \text{不等式 ② の非負整数解}$$

よって, 不等式 ① の非負整数解 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ の個数と不等式 ② の非負整数解 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の個数は一致することを **数えることなく** 証明することができた．

- **1-2 : 集合の濃度**

集合 X の元の個数が有限個であるとき, X を **有限集合** といい, そうでないとき **無限集合** という．有限集合 X が含む元の数を $|X|$ で表す．すなわち, X が n 個の元からなるとき, $|X| = n$ と定義する．有限集合の場合は, $|X|$ の値を比較すれば, どちらの集合がより大きいかがわかる．では, X が無限集合の場合はどのように「大きさ」を比較すればよいだろうか．

1-1 節で示したことは, ある 2 つの対象の数を列挙して数えることなく, 対応付けることによって大小を比較する方法である．この「対応付ける」という方法は, 2 つの対象 X と Y があったとき, $x \in X$ と $y \in Y$ のペア (x, y) を考えていくことで X と Y のどちらが大きい, あるいは等しいといったことを説明することができる道具となる．「対応付ける」ということは「写像」を考えることになるので, 写像について復習しておこう．

空でないような 2 つの集合 X, Y に対して, X に属する各々の元に対して Y の元をただ一つずつ対応させる規則を X から Y への **写像** という．f が X から Y への写像であって, $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき

$$f : X \longrightarrow Y; \quad x \longmapsto y$$

のようにかき, $f(x) = y$ と表す．

用語	定義	意味
f が **単射**	$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．
f が **全射**	$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \quad (\text{s.t.}) \quad f(x) = y$	任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ で $f(x) = y$ となるものが存在する．
f が **全単射**	「f が単射」 $\wedge$ 「f が全射」	任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ で $f(x) = y$ となるものがただ一つ存在する．

例 1-2 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と正の偶数全体の集合 $2\mathbb{N} := \{2, 4, 6, \ldots\}$ を考える．もちろん, $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ なので, **$2\mathbb{N}$ は $\mathbb{N}$ より少ない気がする．** しかし, 写像

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}; \quad n \longmapsto 2n$$

を考えれば, これは全単射である．よって, $n \in \mathbb{N}$ と $2n \in 2\mathbb{N}$ と漏れなく重複なくペア $(n, 2n)$ を作ることができるので, 「$\mathbb{N}$ の大きさ」と「$2\mathbb{N}$ の大きさ」は等しい．

では, 集合の「大きさ」を厳密に定義しよう.

定義 1.1. X, Y を集合とする.

(a) 単射 $f : X \to Y$ が存在するとき, $|X| \leq |Y|$ と定め, **X の濃度は Y の濃度以下である** という.
(b) 全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき, $|X| = |Y|$ と定め, **X の濃度と Y の濃度は等しい** という.
(c) $|X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ であるとき, $|X| < |Y|$ と定め, **X の濃度は Y の濃度未満である** という.
(d) X が有限集合であって, X の元の数が n であるとき, $|X| = n$ と定め, **X の濃度は n である** という.

例 1-2　**例 1-1** によって. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と性の偶数全体の集合 $2\mathbb{N}$ の間に全単射が存在したので, $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ である. また, 写像

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad n \longmapsto n$$

は単射であるから, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ である. これは, $\mathbb{N}$ の濃度が $\mathbb{Z}$ の濃度以下であるということなので, 直感的にも納得できる. しかし, 写像

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad n \longmapsto \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}), \\ k & (n = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \text{ のとき}), \\ -k & (n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

は全単射であるから, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ である. これは, $\mathbb{N}$ の大きさと $\mathbb{Z}$ の大きさが同じであることを表している.

命題 1.2. X, Y, Z を集合とする. このとき, 次が成り立つ[*1].

(1) $|X| \leq |X|$ である.
(2) $|X| = |Y|$ ならば $|Y| = |X|$ である.
(3) $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば, $|X| \leq |Z|$ が成り立つ.
(4) $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば, $|X| = |Y|$ が成り立つ[*2].

証明. (1) X から X への恒等写像を考えれば, これは全単射であるが, 特に単射であるから $|X| \leq |X|$ である.

(2) $|X| = |Y|$ より, ある全単射な写像 $f : X \to Y$ が存在する. このとき, 逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ をとれば, これも全単射であるから $|Y| = |X|$ が示された.

(3) $|X| \leq |Y|$ より, ある全単射な写像 $f : X \to Y$ が存在する. また, $|Y| \leq |Z|$ より, ある全単射な写像 $g : Y \to Z$ が存在する. このとき, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるので $|X| \leq |Z|$ が示された.

(4) **1-A** 節を参照. □

• 1-3 : 可算集合

定義 1.3. 集合 X が **可算集合** であるとは, $|X| = |\mathbb{N}|$ であるときをいう. また, X が **高々可算集合** であるとは, X が有限集合であるか, 可算集合であるときをいう.

例 1-2 と **例 1-3** によって, $2\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ は可算集合である.

命題 1.4. 次が成り立つ.

(1) 可算集合と濃度の等しい集合は可算集合である.
(2) 可算集合の部分集合は高々可算集合である.

[*1] (1), (3), (4) により, 濃度の大小を表す $\leq$ は順序を定めていることがわかる.
[*2] (4) は Bernstein の定理と呼ばれている.

証明. (1) X を可算集合とし, $|X| = |Y|$ とする. X は可算集合なので, ある全単射な写像 $f : X \to \mathbb{N}$ が存在する. また, 仮定から全単射な写像 $g : X \to Y$ が存在するが, 合成写像 $(f \circ g^{-1}) : Y \to \mathbb{N}$ は全単射となり $|Y| = |\mathbb{N}|$ であることが示された.

(2) X を可算集合で, Y をその部分集合とする. このとき, X は $\mathbb{N}$ としても**一般性を失わない** [*3]. $Y \subset X$ が有限集合でないとき, Y は可算集合であることを示せばよい. Y は自然数からなる集合であるから, 要素を小さい順に並べることができて, これを

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$$

とおく. このとき, Y は無限集合だから

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow Y; \quad n \longmapsto y_n$$

は全単射な写像である. よって, $|Y| = |\mathbb{N}|$ となり, Y が可算集合であることが示された. □

例 1-3　$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ は可算集合である. これを示すために, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ の要素を次にように並べてみる.

$$\underbrace{(1,1)}_{m+n=2}, \underbrace{(1,2),(2,1)}_{m+n=3}, \underbrace{(1,3),(2,2),(3,1)}_{m+n=4}, \underbrace{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}_{m+n=5}, \ldots$$

写像 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を, (m, n) がこの列の左端から $f(m, n)$ 番目に現れると定義する. すなわち,

$$f(m, n) := \frac{m(m+1)}{2} + m(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

と定めと, これは全単射である. よって, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$ である.

例 1-4 (Cantor の対角線論法).　半開区間 $[0, 1)$ は高々可算集合ではない. これは背理法で証明される. まず, $0.300\cdots = 0.2999\cdots$ のように 2 通りで小数点表示されることがあるので, このときは $0.300\cdots$ の方を採用することにし, ある桁から先全てが 9 とはならないとしておく.

半開区間 $[0, 1)$ は明らかに有限集合ではないから, 可算集合でないことを示せば良い. そこで, $[0, 1)$ が可算集合であると仮定する. すると, 全単射な写像 $f : \mathbb{N} \to [0, 1)$ が存在する.

$$f(n) = 0.\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \cdots \quad (a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \text{ であり, ある番号から先が全て 9 ではない.})$$

と表しておこう. このとき, 数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ を次のように定義する.

$$b_m := \begin{cases} 1 & \text{if } a_{m,m} = 0, \\ 0 & \text{if } a_{m,m} \neq 0. \end{cases}$$

このとき, 小数 $0.b_1 b_2 b_3 \cdots \in [0, 1)$ である. しかし, これはどの $n \in \mathbb{N}$ に対する $f(n)$ とも異なる小数である. なぜならば, 小数第 n 位を比べると, 必ず $a_{n,n} \neq b_n$ だからである. これは, f の全射性に反するので, 矛盾である. ゆえに $[0, 1)$ は可算集合ではない.

[*3] X は可算集合なので, 全単射な写像 $f : X \to \mathbb{N}$ が存在する. これの逆写像 $f^{-1} : \mathbb{N} \to X$ を考えると, 像 $f^{-1}(B)$ は B と濃度が等しい. よって, もし $f^{-1}(B)$ が高々可算集合であれば, B も高々可算集合となる. 従って, $X = \mathbb{N}$ として初めても問題ない.

小テスト 1-1 m, n を自然数とする．集合 $X_{m,n}$ を

$$X_{m,n} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $|X_{3,4}|$ を求めよ．
(2) $|X_{m,n}|$ を m, n を用いて表せ．

小テスト 1-2 次の命題の真理値をそれぞれ答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の一般項が

$$a_n = (\sqrt{2})^n$$

で与えられているとする．このとき，この数列の値からなる集合 $X := \{a_1, a_2, \ldots\}$ は可算集合である．
(2) X, Y を $|X| = 2,\ |Y| = 4$ を満たす集合とする．このとき，$\forall f : X \to Y$ は単射である．
(3) 偶数全体の集合 $\mathcal{E}$ と奇数全体の集合 $\mathcal{O}$ の濃度は等しい．
(4) 高々可算集合の部分集合は，高々可算集合である．
(5) $\exists f : X \to Y$ (s.t.) f は全射ではないが単射である $\Longrightarrow |X| < |Y|$.

演習問題 1-1 集合 X, Y, Z に対して，$|X| = |Y|$ かつ $|Y| = |Z|$ ならば $|X| = |Z|$ であることを証明せよ．

演習問題 1-2 次の命題をそれぞれ証明せよ．

(1) 4 つの集合 A, B, C, D について，$|A| = |C|$ かつ $|B| = |D|$ ならば，$|A \times B| = |C \times D|$ である．
(2) $\mathbb{Z}^2$ は可算集合である．

演習問題 1-3 次の命題を証明せよ．

(1) $[0, 1)$ が可算集合でないことを用いて，$(0, 1)$ が可算集合ではないことを示せ．
(2) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ と開区間 $(0, 1)$ の濃度が等しいことを示せ．
(3) $\mathbb{R}$ は可算集合ではないことを示せ．

- **1-A：Bernstein の定理の証明**

定理 (Bernstein の定理)**.** X, Y, Z を集合とする．このとき，$|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば，$|X| = |Y|$ が成り立つ．

証明. $|X| \leq |Y|$ より，ある単射な写像 $f : X \to Y$ が存在する．また，$|Y| \leq |X|$ より，ある単射な写像 $g : Y \to X$ が存在する．ここで，合成写像 $\Phi := g \circ f : X \to X$ を考えれば，これは単射である．

まず，$X_2 := \Phi(X)$ とおくと，これは X の部分集合であり，

$$\Phi_2 : X \longrightarrow X_2; \quad x \longmapsto \Phi(x)$$

は全単射となる．よって，$|X| = |X_2|$ である．以下，自然数 $n \geq 2$ に対して帰納的に $X_{2n} := \Phi(X_{2(n-1)})$ とおくと，これらは X の部分集合であって，

$$\Phi_{2n} : X_{2(n-1)} \longrightarrow X_{2n}; \quad x \longmapsto \Phi(x)$$

は全単射となる．よって，$|X_{2(n-1)}| = |X_{2n}|$ である．これによって，

$$X \supset X_2 \supset X_4 \supset X_6 \supset \cdots, \quad |X| = |X_2| = |X_4| = |X_6| = \cdots$$

という X の部分集合の列を得た．

次に，$X_1 := g(Y)$ とおくと，これは X の部分集合であり，

$$\Phi_1 : Y \longrightarrow X_1; \quad y \longmapsto g(y)$$

は全単射となる．よって，$|Y| = |X_1|$ である．集合 X_1 に対して，$X_3 := \Phi(X_1)$ 以下，先ほどと同様にして，自然数 $n > 1$ に対して帰納的に $X_{2n-1} := \Phi(X_{2n-3})$ とおくと，これらは X の部分集合であって，

$$\Phi_{2n-1} : X_{2n-3} \longrightarrow X_{2n-1}; \quad x \longmapsto \Phi(x)$$

は全単射となる．よって，$|X_{2n-1}| = |X_{2n-3}|$ である．これによって，

$$X \supset X_1 \supset X_3 \supset X_5 \supset \cdots, \quad |X| = |X_1| = |X_3| = |X_5| = \cdots$$

という X の部分集合の列を得た．

ところで f は単射だから，$Y \supset f(X)$ となり，これの両辺を g でうつすと $g(Y) \supset g(f(X))$，すなわち $X_1 \supset X_2$ を得る．続いて，$X \supset X_1 \supset X_2$ の辺々を Φ でうつすと，$X_2 \supset X_3 \supset X_4$ を得る．この操作を繰り返せば，

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset X_4 \supset \cdots$$

を得ることになる．ここで，

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$$

とおくと，X と X_1 は互いに共通部分をもたない集合の和集合として次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} X &= (X \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus X_2) \cup \cdots\cdots (X_{2n} \setminus X_{2n+1}) \cup \cdots \cup K \\ X_1 &= (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_3) \cup \cdots\cdots (X_{2n+1} \setminus X_{2n+2}) \cup \cdots \cup K \end{aligned}$$

$X_0 := X$ とおくと，各自然数 n に対して，

$$\Phi_{2n} : X_{2n-2} \setminus X_{2n-1} \longrightarrow X_{2n} \setminus X_{2n+1}, \quad \text{恒等写像} : X_{2n-1} \setminus X_{2n} \longrightarrow X_{2n-1} \setminus X_{2n}, \quad \text{恒等写像} : K \longrightarrow K$$

を合わせることで全単射な写像 $X \to X_1$ を構成することができる．よって，$|X| = |X_1| = |Y|$ となり，証明が完了した． □