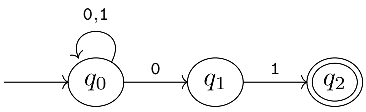
8 形式言語論 (2) – 非決定性有限オートマトン –

• 8-1：非決定性有限オートマトン

「非決定性」は計算の理論に大きなインパクトを与えた有用な概念である．決定性オートマトンでは，遷移の各ステップで文字を読み込んだとき，次の状態が何かであるかが決まっている．それに対して，**非決定性** とは，各ステップにおいて，次の状態への遷移として複数の選択が存在しうる場合をいう．そのような状況を許した有限オートマトンは非決定性有限オートマトンと呼ばれる．例えば，以下の図では状態 q_0 から 0 の矢印が 2 本存在し，状態 q_1 から 0 の矢印はない．状態 q_2 については，そこから伸びる矢印は 1 本もない．



…………………… ①

非決定性オートマトンはどのようにして処理を行うのだろうか．例えば，① において状態 q_0 にあるとき，次の入力が 0 であったとする．文字 0 を読みだしたあと，機械はそれ自体のコピーを作成し，その後に取りうるすべての可能性を並列にたどる． また，コピーされたある機械が状態 q_1 から文字 0 を読み込んだとき，そのコピーは消失して計算過程を消去する．文字列の読み込みが終了したとき，コピーされた機械のうち，どれか 1 つでも受理状態にあるならば，その文字列を受理する．

定義 8.1. 2 つの有限集合 K, Σ と写像 $\delta : K \times \Sigma \to 2^K$, および $q_0 \in K$ と $F \subset K$ の 5 つ組 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を **非決定性有限オートマトン** と呼ぶ． 決定性の場合と同様に，K の元を **状態**, Σ の元を **入力アルファベット**, 写像 δ を **遷移関数**, $q_0 \in K$ を **開始状態**, $F \subset K$ の元を **受理状態** と呼ぶ．[*1]

	決定性オートマトン	非決定性オートマトン
状態の集合	K	K
アルファベット	Σ	Σ
遷移関数	$\delta : K \times \Sigma \to K$	$\delta : K \times \Sigma \to 2^K$
開始状態	q_0	q_0
受理状態	$F \subset K$	$F \subset K$

表 1 決定性オートマトンと非決定性オートマトン

例 8-1 集合 K, Σ, F を

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{0,\ 1\}, \quad F = \{q_2\}$$

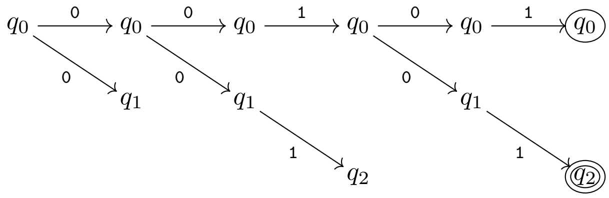
として，遷移関数 δ が次で与えられるような非決定性有限オートマトン $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ を考える．

δ	0	1
$\to q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

[*1] 2024 年度の離散数学 2 では，非決定性有限オートマトンは初めから「ε-規則」を許していた．ε-規則を許したとしても，そのオートマトンが認識できる言語のクラスは広がらないが，議論が複雑になるため，この講義では後に紹介するに留める．詳しく学びたい学生は，参考文献を当たるか，2 年次後期に開講される「形式言語とオートマトン」を受講すると良い．

ただし, 決定性有限オートマトンの場合とは異なり, 表の値として書き込めるのは「状態の集合」である. 特に, ある状態からある入力に対する遷移が一つもないとき, 表の値には空集合 $\varnothing$ を記入する. このとき, M の状態遷移図は①で与えられる.

イメージを掴むために, この非決定性有限オートマトン M が 、入力された文字列に対してどの様な処理をするのかを図示してみよう. 例えば, $w = \texttt{00101}$ を入力すると, M は開始状態 q_0 から様々な状態に枝分かれしてゆく. ここで, 入力に対して次の状態に遷移できない場合は文字列を拒否することになる. 従って, 下図において, はじめの q_0 から出発して $w = \texttt{00101}$ のルートを辿った先の q_0 と q_2 の 2 つからなる状態の集合 $\{q_0, q_2\}$ を M は返す. 入力の読み込みが終了したとき, 結果は受理状態 q_2 を含むので, M は文字列 00101 を受理する.



- **8-2：非決定性有限オートマトンが認識する言語**

非決定性有限オートマトンが認識する言語を正確に定義するのに, 決定性有限オートマトンのときと同様にして遷移関数 δ を拡張する必要がある.

定義 8.2. 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して, **拡張された遷移関数** $\widehat{\delta} : K \times \Sigma^* \to 2^K$ を $(q, w) \in K \times \Sigma^*$ に対して次のように帰納的に定義する.

(i) $w = \varepsilon$ のとき, $\widehat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$.

(ii) $w = xa$ ($x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$) であるとする. このとき, $\widehat{\delta}(q, x) = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ であるとき,

$$\widehat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(r_i, a).$$

特に, $a \in \Sigma$ に対して. $\widehat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$.

例 8-2 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を**例 8-1** で与えたものとする. このとき, M に $w = \texttt{00101}$ を入力して実行されるプロセスを見るために, 拡張された遷移関数 $\widehat{\delta}$ による $\widehat{\delta}(q_0, w)$ を計算しよう.

- $\widehat{\delta}(q_0, \texttt{0}) = \{q_0, q_1\}$,
- $\widehat{\delta}(q_0, \texttt{00}) = \delta(q_0, \texttt{0}) \cup \delta(q_1, \texttt{0}) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$,
- $\widehat{\delta}(q_0, \texttt{001}) = \delta(q_0, \texttt{1}) \cup \delta(q_1, \texttt{1}) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$,
- $\widehat{\delta}(q_0, \texttt{0010}) = \delta(q_0, \texttt{0}) \cup \delta(q_2, \texttt{0}) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$,
- $\widehat{\delta}(q_0, \texttt{00101}) = \delta(q_0, \texttt{1}) \cup \delta(q_1, \texttt{1}) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

となる. こうして, 00101 は M によって受理されることがわかった.

定義 8.3. 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が文字列 $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^*$ ($w_i \in \Sigma$) を **受理する** とは, 拡張された遷移関数 $\widehat{\delta}$ によって, $\widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$ となるときをいう. M が w にを受理しないとき, M は w を **拒否する** という. M によって受理される文字列全体を $\mathcal{T}(M)$ と表し, これを **M が認識する言語** という. すなわち,

$$\mathcal{T}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

である.

• 8-3：非決定性有限オートマトンから決定性有限オートマトンへの変換

非決定性有限オートマトンのほうが決定性有限オートマトンよりも扱える範囲が広く感じる．しかし，後に示すように，驚くことに実際には 2 つの間に差がない．これを示すために，与えられた非決定性オートマトン M と同じ言語を認識する決定性オートマトン M^{Det} を形式的に構成しよう．

非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して，決定性オートマトン $M^{\mathsf{Det}} = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ を以下で定義する．

- $K' := 2^K$, $q_0' := \{q_0\}$
- 遷移関数 $\delta' : K' \times \Sigma \to K'$ を $L \in K'$ と $a \in \Sigma$ に対して，

$$\delta'(L, a) := \bigcup_{r \in L} \delta(r, a) = \{q \in K \mid \text{ある } r \in L \text{ について}, q \in \delta(r, a)\}$$

  と定義する．
- $F' := \{L \in K' \mid L \cap F \neq \varnothing\}$

例 8-3　**例 8-1** で与えられた非決定性有限オートマトン M が認識する言語 $\mathcal{T}(M)$ は次で与えられる[*2]．

$$\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は } \mathtt{01} \text{ で終わる．}\}$$

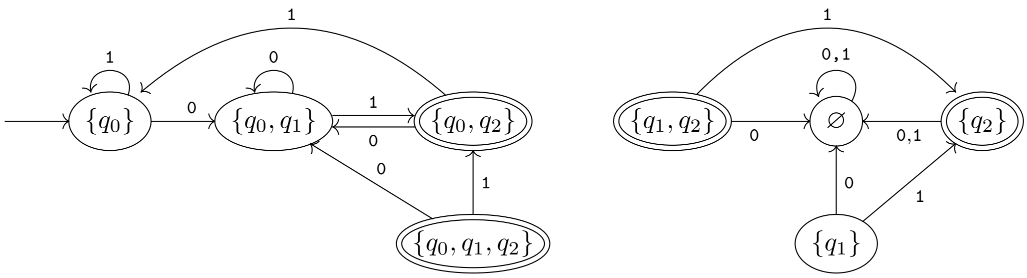
このとき，$M^{\mathsf{Det}} = (K', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ は以下の形で与えられる．

$$K' := \{\ \varnothing, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\ \}$$
$$F' := \{L \in K' \mid L \cap \{q_2\} \neq \varnothing\} = \{L \subset K \mid q_2 \in L\}$$

δ'	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

δ'	0	1
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$^*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$^*\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$^*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

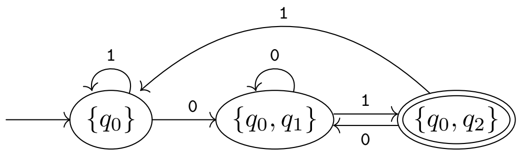
このようにして構成した M^{Det} の状態遷移図は以下で与えられる．



ところで，状態遷移図をみれば，

$$\varnothing, \quad \{q_1\}, \quad \{q_2\}, \quad \{q_1, q_2\}, \quad \{q_0, q_1, q_2\}$$

は開始状態から到達できない状態である．従って，認識する言語が何かということを直感的に理解するためには，必要な部分のみを抜き出せば十分である．



[*2] **8-A** 節を参照

- **8-4：非決定性有限オートマトンと決定性有限オートマトンの性能差**

定理 8.4. 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して, $\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(M^{\mathsf{Det}})$ が成り立つ.

証明. $M^{\mathsf{Det}} = (2^K, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ とおく．また, M および M^{Det} から得られる拡張された遷移関数をそれぞれ $\widehat{\delta}, \widehat{\delta'}$ とおく．このとき, 任意の $w \in \Sigma^*$ に対して

$$\widehat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w)$$

であることを, $\ell(w)$ に関する帰納法で証明する.

(I) $\ell(w) = 0$ のとき, $w = \varepsilon$ なので $\widehat{\delta}(q_0, w) = \{q_0\} = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w)$ であるから主張は正しい.

(II) $n \geq 0$ とし, 長さが n 以下の文字列について主張が正しいと仮定する．$w = xa$ ($x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$) と表すと, 帰納法の仮定によって $\widehat{\delta}(q_0, x) = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, x)$ が成り立つ．そこで, $\widehat{\delta}(q_0, x) = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, x) = \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ とおくと,

$$\widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) = \delta'\left(\widehat{\delta'}(\{q_0\}, x), a\right) = \delta'\left(\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}, a\right) = \bigcup_{i=1}^{s} \delta(r_i, a) = \widehat{\delta}(q_0, w)$$

となり, $\ell(w) = n + 1$ の場合も証明された.

以上によって, 任意の文字列 $w \in \Sigma^*$ に対して $\widehat{\delta}(q_0, w) = \{q_0\} = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w)$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\} &= \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \varnothing\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \in F'\} = \mathcal{T}(M^{\mathsf{Det}})\end{aligned}$$

となり, 証明が完了した. □

定理 8.5. 言語 L がある決定性有限オートマトン M で認識されるための必要十分条件は, L がある非決定性有限オートマトン N で認識されることである.

証明. **（十分条件）** 言語 L がある非決定性有限オートマトン N で認識されると仮定する．N に対して, 決定性有限オートマトン N^{Det} を考えれば, **定理 8.4** によって $\mathcal{T}(N) = \mathcal{T}(N^{\mathsf{Det}})$ である.

（必要条件） 言語 L がある決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で認識されると仮定する．このとき, 写像 $\delta_N : K \times \Sigma \to 2^K$ を

$$\delta_N(q, w) := \{r\} \quad (q \in K,\ w \in \Sigma^*,\ \delta(q, w) = r)$$

と定義する．こうして, 非決定性有限オートマトン $N = (K, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ が得られる．このとき, δ, δ_N の拡張された遷移関数 $\widehat{\delta}, \widehat{\delta_N}$ に関して, 任意の $w \in \Sigma^*$ に対して

$$\widehat{\delta_N}(q, w) = \{r\} \quad (q \in K,\ w \in \Sigma^*,\ \widehat{\delta}(q, w) = r)$$

であることを $\ell(w)$ に関する帰納法で示すことができる[*3]．よって,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \in F\} &= \{w \in \Sigma^* \mid \{\widehat{\delta}(q_0, w)\} \cap F \neq \varnothing\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta_N}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\} = \mathcal{T}(N)\end{aligned}$$

となり, 証明が完了した. □

[*3] 実際に, 各自で証明せよ（ **演習問題 8-1** を参照せよ）.

小テスト 8-1　次の記述が正しければ ◯, 間違っていれば × を選択せよ.

(1) 非決定性有限オートマトンの状態遷移図には, ある状態 q と, あるアルファベット a について, a を読み込んだとき q が遷移する状態が 2 箇所以上となるようなものが必ず存在する.

(2) 状態の集合が K の非決定性有限オートマトンと決定性有限オートマトンでは, それぞれの遷移関数の定義域が異なる.

(3) 非決定性有限オートマトン M と同じ言語を認識する決定性有限オートマトンは M^{Det} のみである.

(4) 非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の拡張された遷移関数を $\widehat{\delta}$ とすると, M の認識する言語は

$$\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in \widehat{\delta}(q_0, w) \text{ (s.t.) } q \in F\}$$

で与えられる.

(5) 非決定性有限オートマトン M の状態の数が n 個であるとき, M^{Det} の状態の数は 2^n 個である.

小テスト 8-2　次の非決定性有限オートマトンが受理する文字列をすべて選べ. 集合 K, Σ, F を

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \quad F = \{q_3\}$$

として, 遷移関数：$\delta : K \times \Sigma \to 2^K$ を以下のように与える.

δ	0	1
$\to q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$^*q_3$	$\varnothing$	$\varnothing$

(a) 001　(b) 101　(c) 1111000
(d) 010101　(e) 0101010101　(f) 01010110001

演習問題 8-1　決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して, 非決定性有限オートマトン $N = (K, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ を

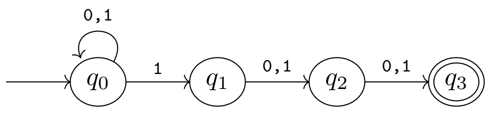
$$\delta_N(q, a) := \{r\} \quad (q \in K,\ a \in \Sigma,\ \delta(q, a) = r)$$

によって定める. このとき, δ, δ_N の拡張された遷移関数 $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta_N}$ に関して, 任意の $w \in \Sigma^*$ に対して

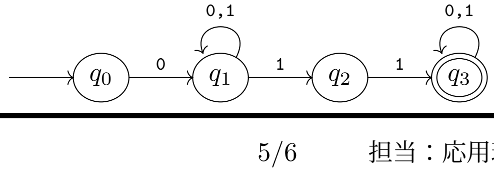
$$\widehat{\delta_N}(q, w) = \{r\} \quad (q \in K,\ w \in \Sigma^*,\ \widehat{\delta}(q, w) = r)$$

であることを $\ell(w)$ に関する帰納法で示せ.

演習問題 8-2　以下の状態遷移図で与えられる非決定性オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を決定性オートマトンに変換せよ.



演習問題 8-3　以下で定まる非決定性オートマトンと同じ言語を受理する決定性オートマトンを 1 つ与えよ.



- **8-A：$\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ は 01 で終わる．$\}$ であることの厳密な証明.**

状態遷移図を見れば, M が認識する言語が 01 で終わる文字列全体であることは "**なんとなく**"納得できる. しかし, 状態遷移図をみることで $\mathcal{T}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ は 01 で終わる．$\}$ であることを証明したことにはならない．なぜならば, 有限オートマトンはあくまで**いくつかの集合, 初期状態と遷移関数によって定義されたシステム**であって, それが受理する言語とは, **拡張された遷移関数と受理状態によって決まる集合**だからである.

厳密に証明するには, $\mathcal{T}(M)$ の定義をきちんと確認する必要がある．$\mathcal{T}(M)$ は $\{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$ と定義されていたが, $F = \{q_2\}$ だから, 左辺の $\widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$ は $q_2 \in \widehat{\delta}(q_0, w)$ ということである．従って, 目標は次の等号を証明することである.

例 8-1 で与えた非決定性有限オートマトン $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ について,

$$\{w \in \Sigma^* \mid q_2 \in \widehat{\delta}(q_0, w)\} = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は } 01 \text{ で終わる．}\}$$

が成り立つ.

<u>**（左辺）$\subset$（右辺）**</u>：任意の $w \in \{w \in \Sigma^* \mid q_2 \in \widehat{\delta}(q_0, w)\}$ をとる．まず, $\widehat{\delta}$ の定義より

$$\widehat{\delta}(q_0, w) = \begin{cases} \{q_0\} & \text{if } (w = \varepsilon) \vee (w = 1), \\ \{q_0, q_1\} & \text{if } w = 0 \end{cases}$$

だから $\ell(w) \geq 2$ である．$w = xa$ $(x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma)$ であるとする．仮定より, ある $r \in \widehat{\delta}(q_0, x)$ によって $q_2 \in \delta(r, a)$ とできる．δ の定義によって $r = q_1$, $a = 1$ である．次に, $x = yb$ $(y \in \Sigma^*,\ b \in \Sigma)$ であるとすると, ある $r' \in \widehat{\delta}(q_0, y)$ によって $q_1 \in \delta(r', b)$ とできる．δ の定義によって $r' = q_0$, $b = 0$ である．以上で, $w = y01$ の形をしているので, w は右辺の集合に属する.

<u>**（左辺）$\supset$（右辺）**</u>：任意の $w \in \{w \in \Sigma^* \mid w$ は 01 で終わる．$\}$ をとり, $w = y01$ $(y \in \Sigma^*)$ であるとする. このとき, $\widehat{\delta}$ の定義より

$$\widehat{\delta}(q_0, w) = \bigcup_{r \in \widehat{\delta}(q_0, y0)} \delta(r, 1)$$

よって, 示すことは $q_1 \in \widehat{\delta}(q_0, y0)$ である．再び $\widehat{\delta}$ の定義より,

$$\widehat{\delta}(q_0, y0) = \bigcup_{r' \in \widehat{\delta}(q_0, y)} \delta(r', 0)$$

だから, $q_0 \in \widehat{\delta}(q_0, y)$ であればよい．つまり示すことは, 任意の文字列 $x \in \Sigma^*$ に対して, $q_0 \in \widehat{\delta}(q_0, x)$ となることである．これを $\ell(x)$ の帰納法によって示す.

(I) $\ell(x) = 0$ のとき, $x = \varepsilon$ なので $\widehat{\delta}(q_0, x) = \{q_0\}$ である.

(II) $\ell(x) = n \geq 0$ のとき, $q_0 \in \widehat{\delta}(q_0, x)$ であると仮定する．このとき, $a = 0, 1$ のいずれにしても $q_0 \in \delta(q_0, a)$ である．ゆえに長さが $n + 1$ の文字列 xa に対しても $q_0 \in \widehat{\delta}(q_0, xa)$ である.

従って, $q_2 \in \widehat{\delta}(q_0, w)$ であるから, $w \in \{w \in \Sigma^* \mid q_2 \in \widehat{\delta}(q_0, w)\}$ である.