令和 5 年度茨城大学工学部情報工学科卒業研究論文

対称 Kronecker 代数上の加群における分解理論

提出日　令和 6 年 2 月 2 日
学科名　情報工学科
氏名　松崎 有真 (19T4086L)
指導教員　宮本 賢伍 助教

令和 5 年度茨城大学工学部情報工学科卒業研究論文

対称 Kronecker 代数上の加群における分解理論

氏名　松崎 有真 (19T4086L)
指導教員　宮本 賢伍 助教

論文要旨

A を代数閉体 K 上の有限次元代数とする．任意の有限次元 A 加群は Krull–Schmidt の定理より，直既約加群の直和に一意に分解できることが分かっている．このとき，A 加群における直既約加群の同型類の完全系および，AR クイバーと呼ばれる有限次元代数 A の加群圏の構造を視覚的に表したデータを用いることにより，任意の A 加群 M についてはそれらを直接分解することなく，この加群を構成する直既約加群の個数を返す写像を求めることによって，この分解を決定づけることができる．とくに有限次元代数上の加群においてはその具体的な計算が行列によって行うことができるためこれをコンピュータ上で実装することも可能である．しかし，一般的には直既約加群の同型類の完全系は有限個であるわけではないので，この計算を行う直既約加群の集合を，与えられた加群の次元から有限個の集合に収める必要もある．直既約加群の個数を返す写像の構築，および直既約加群の同型類の完全系を有限集合に収めるというこの二つの問題を任意の有限次元代数について解くことにより，この代数上の加群の分解をコンピュータ上で有限時間で解くことが可能になる．このようにある加群の直既約分解について具体的に計算を行う理論を加群の分解理論と呼ぶ [ANY17].

本研究ではこれらの理論を対称 Kronecker 代数と呼ばれる代数上の加群を対象に構築することをした．この代数上の加群に対して，構成される直既約加群の個数を返す写像は構築することができ，コンピュータによる実装も行った．しかし，対称 Kronecker 代数は直既約加群の個数が無限に存在する代数の一つであるが，これについて，有限集合に収めるための計算法を構築できなかったので，この点に関して課題が残った．しかし，これらの計算をするための基本的な事実を考察として示した．

目次

1　はじめに

K 上の有限次元代数とは，可換環 K 上の加群であって，その構造を保つような積を入れた数学的構造である．これにより代数は環の構造と K 上ベクトル空間の構造を備える．一般に代数の性質を直接調べるのは難しいことが多いため，これらの性質を理解するためにはより分かりやすい対象と結びつけることが行われる．具体的には，K 上ベクトル空間 M の線形変換 $\mathrm{End}_K(M)$ に対して，代数 A からの作用を定めることによって行われ，これは単にベクトル空間 M に A からの作用を定めているのと同じである．よって，代数の性質を調べる際にはこの代数上の加群を考えればよいことが分かったが，どのようにして性質を調べればよいだろうか．任意の有限次元代数 A については，Krull–Schmidt の定理より, A 上の有限生成加群が同型と順番を除いて，直既約加群の直和に一意に分解されるということが分かっている．したがって，任意の加群が直既約加群を基本単位として記述できるなら，直既約加群を同型を除いて分けることができればよいだろう．これは 2 章で解説する．次に加群と加群の間の関係についてはどうだろうか．これをより統一的に表す手段として，A 上の加群圏 $\mathrm{mod}(A)$ を考える．加群の間の射に対しても，任意の有限生成加群が直既約加群の直和で記述できたように，これ以上分解できないという性質を持つ，既約写像というのを考える．A 上の加群における準同型の基本単位はこの既約写像を考えていく．この 2 つを知ることができると，直既約加群と既約写像との対応をある種のグラフとして表現することができる．これは 4 章で説明する．また 3 章では有限次元代数上の加群がより分かりやすい箙とよばれる構造に対する代数上の加群で表せることを紹介する．これにより，A 加群の計算は線形代数の知識で具体的に計算することが可能になる．

本論文の目的は対称 Kronecker 代数上の加群に対する分解理論の構築およびその計算を行うことである．加群の分解理論では，ある有限次元代数上の加群について，それを構成する直既約加群をより具体的に計算することを行う．考える問題は二つあり，一つ目はある加群 M に対してそれを構成する直既約加群の個数を返す写像が構成できるかということ．二つ目はこれらの直既約加群について，存在しうる直既約加群を限定できるかということである．ある代数上の加群は有限個の直既約加群の同型類しか持たないこともあるが，この直既約加群の同型類を無限に持つ場合もある．二つ目の問題はこのような状況下で有限のアルゴリズムを与えるために必要な条件となる．対称 Kronecker 代数の直既約加群は無限に存在し，それらの直既約加群は 1 パラメータで記述されている．このような直既約加群を持つ代数を順表現型という．これも 3 章で詳しく説明しよう．本論文の主結

果として一つ目の問題に関する完全な解法を与えることができた．さらに具体的にこの関数をコンピュータ上で実装した．二つ目の問題に関しては，解法を得ることができなかったが，本研究の先行研究である [ANY17] をもとにいくつかの考察をした．

2　準備

ある集合 (**台集合** (underlying set) と呼ぶ．) に演算や作用を付け加えて決まる構造を**代数的構造** (algebraic structure) などと呼び，この代数的構造をもつ集合を**代数系** (algebraic system) と呼ぶ．マグマ，半群，モノイド，群などは一つの演算によって，環や体などは二つの演算によって決まる代数的構造である．本章の目的は加群に対する知識を提供することであるが，加群は演算と作用によって決まる代数的構造であり，特に体上で定義される加群はベクトル空間のことにほかならない．また，代数系にはそれぞれ準同型と呼ばれる構造を持つ写像が存在する．この代数系と準同型を基本として理解することが重要である．

2.1　半群，モノイド，群

定義 2.1. S を集合とする．S 上の**二項演算** (binary operation) とは，

$$\circ\colon S \times S \to S$$

なる写像のことである．S の元 a, b に対して $\circ(a, b) = a \circ b$ と表す．

定義 2.2. S を集合とする． S と二項演算 $\circ\colon S \times S \to S$ の組 $(S, \circ)$ を**マグマ** (magma) という．

定義 2.3. $(S, \circ)$ をマグマとする． $a, b, c \in S$ について，マグマの二項演算が結合法則

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

を満たすとき，組 $(S, \circ)$ を**半群** (semigroup) という．

定義 2.4. $(S, \circ)$ を半群とする．このとき，**単位元** (identity element) と呼ばれる元 $e \in S$ が存在して，$a \in S$ について，単位法則

$$a \circ e = a = e \circ a$$

を満たすとき，組 $(S, \circ, e)$ を**モノイド** (monoid) という．

定義 2.5. $(S, \circ, e)$ をモノイドとする．このとき， $a \in S$ について，

$$s \circ a = e = a \circ s$$

となるような元 $s \in S$ が存在するとき， s を a の**逆元** (inverse element) という．S 上のすべての元に逆元が存在するとき，組 $(S, \circ, e)$ を**群** (group) という．

注意 1. 単位元は存在すれば一意である．したがって，しばしば単位元 e を省略して $(S, \circ)$ をモノイドであるという言い方もする．また，逆元も存在すればただ一つである．そこで，$a \in S$ の逆元を a^{-1} と表す．また，逆元について補足だが，$s \circ a = e$ となるとき s を**左逆元**，$a \circ s = e$ となるとき，s を**右逆元**といい，定義のように $s \circ a = e = a \circ s$ となるときは**両側逆元**あるいは単に**逆元**という．また，逆元が存在する元を**可逆元**と呼ぶ．

マグマ $(R, \circ)$ ，に対して，二元 $a, b \in R$ が可換則

$$a \circ b = b \circ a$$

を満たすとき， a, b は**可換**であるという．任意の二元が可換であるような群を**可換群** (commutative group) という．可換群のことを**アーベル群** (abelian group) ともいう．可換群であって，二項演算が加法 $(+) \colon S \times S \to S$ であるものを，**加法群** (additive group) という．このとき，単位元を 0 ，逆元を $-a$ と表記し，組 $(S, +, 0)$ で表す．

定義 2.6. $(X, +, 0)$ を加法群とする． X の部分集合 Y で加法群の構造を保存するものを X の**部分加法群** (additive subgroup) と呼ぶ．すなわち，$(Y, +, 0)$ が加法群であり，$Y \subseteq X$ を満足するもののことである．

定義 2.7. X を加法群，Y を X の部分加法群とする．このとき X の元の間に次の同値関係を定める．任意の $x, x' \in X$ について，

$$x \sim x' \iff x' - x \in Y$$

とする．X の元のこの同値関係による剰余類の成す集合を X/Y と書き，X の Y による**剰余加法群** (factor additive group) とよぶ．X/Y の元は X の元 x によって代表される同値類の集合 $[x] = \{x' \mid x \sim x'\}$ であり，$[x]$ を $x + Y$ と表記することもある．

注意 2. 剰余加法群 X/Y は加法群の構造を持つ．まず，X/Y の元の間の演算を次のように定義する． 任意の $x, x' \in X$ に対して，$[x], [x'] \in X/Y$ の間の加法 $\dot{+}$ を

$$[x] \dot{+} [x'] := [x + x']$$

で定める．これの well-defined 性について確認する必要がある． X/Y の任意の二元を $[x_1]=[x_1']$, $[x_2]=[x_2']$ とするとき，$[x_1+x_2]=[x_1'+x_2']$ であることを示せばよい．$[x_1]=[x_1']$ より， $x_1-x_1'\in Y$ ， $[x_2]=[x_2']$ より， $x_2-x_2'\in Y$ となる．よって，

$$(x_1+x_2)-(x_1'+x_2')=(x_1-x_1')+(x_2-x_2')\in Y$$

より，$[x_1+x_2]=[x_1'+x_2']$ となる．以上より well-defined 性が言えた．

次にこの演算により加法群の構造を持っていることを確認する．結合法則については X/Y 上の演算が X の加法によって定義されているため自動的に成り立つ．単位元は X の単位元を 0_X とすると $Y=[0_X]\in X/Y$ となることから分かる．逆元の存在は，$[x]\dot{+}[-x]=[x-x]=[0_X]=Y$ であることから，$[x]^{-1}=[-x]$ である．以上より X/Y が加法群の構造を持っていることが分かった．

定義 2.8. $(X,+,0_X)$, $(Y,+,0_Y)$ を加法群とする．このとき,（集合の間の）写像 $f\colon X\to Y$ が，$a,b\in X$ に対して，

- $f(a+b)=f(a)+f(b)$
- $f(0_X)=0_Y$

を満たすとき，写像 f を加法群の間の**準同型** (homomorphism) という．また，X から Y への加法群の間の準同型の成す集合を

$$\mathrm{Hom}(X,Y):=\{f:X\to Y\}$$

と表す．特に， $\mathrm{Hom}(X,X)=\mathrm{End}(X)$ と書き，これの元を**自己準同型** (endmorphism) という．

注意 3. $\mathrm{Hom}(X,Y)$ も加法群の構造を持つ．実際に，$f,g\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ に対し，$f+g\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ を任意 $x\in X$ について，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

で定めると，この演算により加法群を成す．実際に，任意の $x\in X$ について，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

より可換性は言える．また，すべての X の元を $0_Y\in Y$ に写す準同型写像（零写像）を $0_{XY}\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ とすると，任意の $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ に対して，

$$0_{XY}+f=f=f+0_{XY}$$

となるので，これが単位元となる．また，f に対して，$-f$ を $(-f)(x)=-f(x)$ のように定義すると，

$$(-f)+f=0_{XY}=f+(-f)$$

となるので，f の逆元の存在も言える．したがって，$\mathrm{Hom}(X,Y)$ は加法群の構造を持つ．

定義 2.9. 加法群 X と Y が**同型** (isomorphic) であるとは，準同型写像 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to X$ であって，

$$g\circ f=\mathrm{id}_X,\quad f\circ g=\mathrm{id}_Y$$

を満たすものが存在するときをいう．このとき，f,g を**同型写像** (isomorphism) という．ここで，id_X と id_Y は恒等写像である．

2.2 環

定義 2.10. R を集合とする．$(R,+,0)$ が加法群であって，二項演算が乗法 $(\cdot)\colon R\times R\to R$ である組 $(R,\cdot)$ が半群であり，$a,b,c\in R$ に対して左分配測

$$c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$$

と右分配測

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

を満たすとき，組 $(R,+,\cdot,0)$ を**環** (ring) という．$a\cdot b$ をしばしば ab と書く．

環であって，$(R,\cdot,1)$ がモノイドであるものを，**単位的環**や**単位環** (unital ring, unitary ring) あるいは**単位元を持つ環** (ring with identity) などと呼び，組 $(R,+,\cdot,0,1)$ で表す．0 は加法についての単位元, 1 は乗法についての単位元である．

注意 4. この場合の乗法単位元も存在すれば一意である．また，単位的代数 M について，R と M の乗法単位元をそれぞれ $1_R\in R, 1_M\in M$ とすると, 任意の $a\in M$ について，

$$1_R*a=1_R*(1_M\cdot a)=(1_R*1_M)\cdot a=1_M\cdot a=a$$

となることに注意する．

以降では特別断らない限り，単に環と言った場合には単位的環のことを指しているとする．

注意 5. $R = \{0\}$ に対し，加法と乗法の演算を

$$0 + 0 = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$

で定めると，これは環の定義を満たす．これを**零環** (zero ring) または**自明な環** (trivial ring) という．零環は $0 = 1$ を満たす唯一の環となっている．実際に，R を環として，加法単位元 0 と乗法単位元 1 が一致しているとする．$a \in R$ に対して，

$$a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

となるので，R は零環となる．

環であって，$(R, \cdot)$ の二項演算がすべて可換であるものを，**可換環** (commutative ring) という．そうでないものを**非可換環**という．

定義 2.11. R を可換環とする．$x, y \in R$ が $xy = 0$ をみたすとき, x もしくは y が零元であるとき, R を**整域** (integral domain) という．

定義 2.12. R を（可換とは限らない）環とする．$R - \{0\}$ が乗法について群となるとき，**斜体** (skew ring) または除法の可能な環であるという意味で**可除環** (division ring) という．また，R が可換環であるような斜体を**体** (field) という．

定義 2.13. 体 K の元を係数とする一次以上の任意の 1 変数多項式が 1 次多項式の積として書けるとき，K は**代数閉体** (algebraically closed field) と呼ばれる．

例 1. 有理数の成す集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の成す集合 $\mathbb{R}$ および，複素数全体の成す集合 $\mathbb{C}$ はそれぞれ環を成し，さらにこれらは体である．

定義 2.14. $(R, +, \cdot, 0, 1)$ を環とする．R の部分集合 S で環の構造を保存するものを R の**部分環** (subring) と呼ぶ．すなわち，$(S, +, \cdot, 0, 1)$ が環であり，$S \subseteq R$ を満足するもののことである．

注意 6. $(R, +, \cdot, 0, 1)$ を環とする．R の部分加法群 S が R の部分環であることと, S が 2 条件

(a) $1 \in S$
(b) 任意の $a, b \in S$ について，$a \cdot b \in S$

をみたすことは同値である．実際, S が R の部分環であれば (a), (b) を満たすのは明らか

であり, 逆に (a) より S は R と単位元を共有し, (b) より S は積について閉じている．また, S の元に関して積の結合則と, 和と積についての分配法則を満たすのは R が環であることから明らかである．よって, S は R の部分環となる.

定義 2.15. R, S を環とする．加法群としての準同型写像 $f\colon R \to S$ が**環準同型写像** (ring homomorphism) または，単に**環準同型**であるとは，$a, b \in R$ に対して次を満たすものである.

- $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(1_R) = 1_S$

注意 7. 一般に環準同型写像の成す集合は加法群の構造を持たないとに注意する．例えば，恒等写像は環準同型写像であるが，零写像はそうでない.

定義 2.16. 環 R と S が**同型** (isomorphic) であるとは, 環準同型写像 $f\colon R \to S$, $g\colon S \to R$ であって,

$$g \circ f = \mathrm{id}_R, \quad f \circ g = \mathrm{id}_S$$

を満たすものが存在するときをいう．このとき，f, g を**同型写像** (isomorphism) といい, R と S が同型であることを

$$R \cong S$$

と書く.

定義 2.17. R, S を環，$f\colon R \to S$ を環準同型とする．準同型 f の**像** (image) $\mathrm{Im}(f)$ と**核** (kernel) $\mathrm{Ker}(f)$ を次で定義する.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in R\}, \quad \mathrm{Ker}(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0\}.$$

定義 2.18. R 可換環, S を環とする．環準同型写像 $R \to S$ が与えられ, $\mathrm{Im}(f) \subset Z(S)$ を満たすとき, S を R **上の代数** (algebra over R) ないしは R **代数**という．ここで, $Z(S)$ は S の中心である.

一般に環 R の部分環 S による剰余加法群 R/S は環になるわけではないことに注意する．剰余加法群 R/S に R から誘導される積が入るためには，$a+S$, $b+S \in R/S$ に対して,

$$(a+S) \cdot (b+S) = a \cdot b + S \cdot b + a \cdot S + S \cdot S$$

より，$S \cdot S$, $a \cdot S$, $S \cdot b \subseteq S$ が成り立てば，$(a+S) \cdot (b+S) = a \cdot b + S$ が満たされるこ

とがわかる．これらの条件を満たすような部分環 S として，次に定義するイデアルというものがある．

定義 2.19. $(R, +, \cdot, 0, 1)$ を環とする．R の部分加法群 I が以下の性質を満たすとき I をそれぞれ R の**左イデアル** (left ideal)，**右イデアル** (right ideal) という．

- $r \in R,\ r \cdot I \in I$
- $r \in R,\ I \cdot r \in I$

また，左イデアルかつ右イデアルであるものを，**両側イデアル** (two-sided ideal) または単に**イデアル** (ideal) と呼ぶ.

注意 8. R が可換環のときは，左イデアルと右イデアルの定義が同値になるので区別しなくてよい．この場合は両側イデアルになる．また，$1_R \in I$ とすると，定義よりすべての R の元が I の元に含まれるので，$I = R$ となる．また，ある可逆元 $r \in R$ が I に含まれているとすると，$r^{-1} \cdot r = 1_R \in I$ となるので，この場合も $I = R$ となる．したがって，$I \neq R$ であるようなイデアルは可逆元を含まない.

例 2. 任意の環 R において零環 $\{0\}$ および，R 自身はイデアルになる，それぞれ**零イデアル** (zero ideal)，**単位イデアル** (unit ideal) と呼ばれ，これらは**自明なイデアル** (trivial ideal) と呼ばれる．自明なイデアルでないものは**真のイデアル** (proper ideal) という．零イデアルを単に 0 と表す．また，自明なイデアルはそれぞれ両側イデアルになっている．

例 3. $\mathrm{Ker}(f)$ は R の両側イデアルになっている．実際，任意の $r \in R, a \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して，$f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0 = 0$ より $ra \in \mathrm{Ker}(f)$ なので左イデアルとなる．右イデアルも同様に計算できる．

例 4. 斜体は零元以外がすべて可逆元のため，斜体の零でない任意のイデアルはそれ自身の単位元を含まなければならない．したがって斜体の零でないイデアルはそれ自身に一致する必要がある．斜体のように自明でないイデアルを持たない，すなわち，環 R のイデアルが 0 と R しか存在しない場合，環 R を**単純** (simple) と呼ぶ．このことからすべての斜体は単純である．また, すべての可換で単純な環は体である．

両側イデアルによって剰余加法群が環構造を持てるようになる．すなわち，環 R とその両側イデアル $I \subseteq R$ に対して，剰余加法群 R/I における加法と乗法を次のように定義する．任意の $a + I, b + I \in R/I$ に対して，

- $(a+I)+(b+I)=a+b+I$
- $(a+I)\cdot(b+I)=a\cdot b+I$

この演算により，R/I は環を成す．この R/I を R のイデアル I による **剰余環** (factor ring) と呼ぶ.

環 R の左（右，両側）イデアルについて，それらの共通部分，和，積も左（右，両側）イデアルになっている．R のイデアル I, J について，共通部分 $I\cap J$ が再びイデアルなのは明らかである．イデアルの和と積については

$$I+J=\{a+b\mid a\in I,\ b\in J\},\quad IJ=\{a_1b_1+\cdots+a_nb_n\mid a_i\in I,\ b_i\in J,\ n\geq 1\}$$

で定義される．例えば左イデアルで考えた場合，$r\in R$ について $r(I+J)\in I+J$, $r(IJ)\in IJ$ となることが容易に確かめられる．

R の左（右，両側）イデアルと正整数 n について，$I^n=I\ldots I$ は再び R の左（右，両側）イデアルになっている．なお，I^n の元は $1\leq i\leq n$ について，各 $a_i\in I$ で $a_1a_2\cdots a_n$ となる要素の有限和である．

定義 2.20. イデアル I が**冪零** (nilpotent) であるとは，ある $m\geq 1$ が存在して $I^m=0$ となるときをいう．

R を環とする．$a\in R$ について，$Ra=\{ra\mid r\in R\}$ とするとこれは R の左イデアルになる．これを a によって**生成された左イデアル**という．同様に，$aR=\{ar\mid r\in R\}$ とするとこれは R の右イデアルとなる．これを a によって**生成された右イデアル**という．$RaR=\{ras\mid r,s\in R\}$ とするとこれは R の両側イデアルになる．これを a によって**生成された両側イデアル**という．a によって生成された左（右，両側）イデアルは a を含む R のイデアルの中で最小の左（右，両側）イデアルになっている．このように 1 つの元で生成されるイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) という．$S\subseteq R$ に対して, S を含む R の最小の左（右，両側）イデアルのことを S で生成された左（右，両側）イデアルという．S の各元を**生成元**といい，有限個の元で生成されるイデアルを**有限生成イデアル** (finitely generated ideal) という．

環 A とその両側イデアル I について, A のイデアルと A/I のイデアルに関する次の主張は基本的である．

命題 2.21 (イデアルの対応定理)**.** 環 A の両側イデアル I をとる．$\pi_I: A\to A/I$ を自然

な全射とする．このとき, 次の対応は, 包含関係を保存するような全単射である．

$$\begin{array}{ccc}\{J \mid J \text{ は } A \text{ のイデアルで } I \subset J\} & \xrightarrow{\simeq} & \{A/I \text{ のイデアル }\} \\ I & \longrightarrow & \pi_I(J) = J/I \\ \pi_I^{-1}(\overline{J}) & \longleftarrow & \overline{J}\end{array}$$

この対応は, 左イデアル, 両側イデアルに取り替えても成り立つ.

証明. 互いに逆写像となっていれば良い．まず, 任意に J/I をとれば, $\pi_I(\pi_I^{-1}(\overline{J})) = \overline{J}$ は明らかである．逆に, A のイデアル J が $I \subset J$ を満たすとする．このとき, $J \subset \pi_I^{-1}(\pi_I(J))$ は明らかである．反対の包含を示すために任意の $x \in \pi_I^{-1}(\pi_I(J))$ をとると, $\pi_I(x) = x + I \in J/I$ である．すると, ある $y \in J$ で $x + I = y + I$ であるから $x - y \in I \subset J$ となる．よって, $x \in J$ だから $\pi_I^{-1}(\pi_I(J)) \subset J$ が成り立つ．包含を保つことは対応の構成から明らかである． □

定義 2.22. 環 R の真のイデアル I が**極大** (maximal) とは $I \subseteq J \subseteq R$ となるようなイデアル J に対し $I = J$ または $J = R$ となるときをいう．

命題 2.23. 環 R の両側イデアル I について，次が同値である．

(1) I が R の極大イデアルである．
(2) 剰余環 R/I が斜体である．

証明. 必要条件が成り立つことは, 命題 2.21 より明らかである．逆に, R/I が斜体であれば, R/I は自明なイデアルしかもたないので R の I を含むイデアルは I と R のみであることが命題 2.21 より従う． □

定義 2.24. 環 R が（ヤコブソン）**根基** (radical) とは R のすべての極大左イデアルの共通部分のことである．これを $\mathrm{rad}(R)$ と書く．

根基はすべての極大左イデアルの共通部分になっているが，同時にすべての極大右イデアルの共通部分にもなっている．したがって根基については右と左を区別する必要はない．これについては次の補題を挙げておく．

補題 2.25. R を環とし，R のすべての極大右イデアルの共通部分を $\widetilde{\mathrm{rad}}(R)$ とおく．任意の $a, b \in R$ について以下は同値である．

(1) $a \in \widetilde{\mathrm{rad}}(R)$
(2) 元 $1 - ab$ が右逆元を持つ．

(3) 元 $1-ab$ が両側逆元を持つ．

(4) $a \in \mathrm{rad}(R)$

(5) 元 $1-ba$ が左逆元を持つ．

(6) 元 $1-ba$ が両側逆元を持つ．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2)：$a \in \widetilde{\mathrm{rad}}(R)$，$b \in R$ とする．$1-ab$ が右逆元を持たないと仮定する．すると，ある極大右イデアル I が $1-ab$ を含み，根基の定義より，$\widetilde{\mathrm{rad}}(R) \subset I$ となる．したがって，$a \in I$ となり，ゆえに I が右イデアルなので，$ab \in I$ となる．しかし，$1 = 1-ab+ab \in I$ より $I = R$ となるので，これは矛盾である．したがって，$1-ab$ は右逆元を持つ．

(2) $\Rightarrow$ (3)：$1-ab$ が右逆元 c を持っているとする．c は $1-ab$ の左逆元でもあることを示す．$1 = (1-ab)c$ であるので，$c = 1+abc = 1-a(-bc)$ となる．(2) より $1-a(-bc)$ は右逆元 d を持つ．すると $1 = cd = (1-a(-bc))d = d+abcd = d+ab$ となる．すなわち，$d = 1-ab$ となり，$1 = cd = c(1-ab)$ となるので，c が $1-ab$ の左逆元になっていることが示せた．

(3) $\Rightarrow$ (1)：$a \notin \widetilde{\mathrm{rad}}(R)$ と仮定する．すると a を含まない極大右イデアル I が存在する．ここで aR を a を含む最小の右イデアルとすると，$I + aR$ は a と I を含む右イデアルになる．また，$I \subset I + aR$ であり，$I \neq I + aR$ である．I が極大右イデアルであるので，$I + aR = R$ が従う．従って，$x \in I$ と $b \in R$ が存在して $1 = x + ab$ となり，$1 - ab = x \in I$ となる．(3) は $1-ab$ が右逆元 y を持っていることを示しているので，$1 = xy \in I$ となる．I は右イデアルなので，これは $I = R$ となることを言っている．これは I が真のイデアルであることに矛盾する．

ここまでで，(1)-(3) が同値であることが示せた，(4)-(6) は (1)-(3) の証明において右を左で置き換えれば同様に，同値であることが言える．

(3) $\Leftrightarrow$ (6)：$1-ab$ が両側逆元 c を持つとすると, $1 = 1-ba+ba = 1-ba+b(1-ab)ca = 1-ba+bca-babca = (1-ba)(1+bca)$ となり，$(1+bca)$ が $(1-ba)$ の右逆元になる．同様に $1 = c(1-ab)$ から $1 = (1+bca)(1-ba)$ が示せる．これも $(1+bca)$ が $(1-ba)$ の左逆元になっている． $\square$

系 2.26. R を環とすると次が成り立つ．

(1) $\mathrm{rad}(R) = \widetilde{\mathrm{rad}}(R)$ である．つまり, $\mathrm{rad}(R)$ は R のすべての極大右イデアルの共通部分である．

(2) $\mathrm{rad}(R)$ が R の両側イデアルである．

(3) $\mathrm{rad}(R/\mathrm{rad}(R)) = 0$ が成り立つ.

(4) I を R の両側冪零イデアルとすると $I \subseteq \mathrm{rad}(R)$ が成り立つ.

証明. (1), (2) は前の補題から直接従う.

(3)：$R/\mathrm{rad}(R)$ の極大イデアルが R の極大イデアル I で $I/\mathrm{rad}(R)$ の形であることがわかる．したがって，$R/\mathrm{rad}(R)$ の根基は，R の根基による R のすべての極大イデアルの共通部分の剰余と同じである．したがって，$\mathrm{rad}(R/\mathrm{rad}(R)) = \mathrm{rad}(R)/\mathrm{rad}(R) = 0$ である.

(4)：I を $m \geq 1$ について，$I^m = 0$ である両側冪零イデアルとする．$x \in I$ とすると，任意の $a \in R$ について $ax \in I$ なので，$(ax)^m = 0$ が成り立つ．したがって，任意の $(1 - ax)$ が左逆元を持つことがわかる．すなわち，

$$1 = 1 - (ax)^m = (1 + ax + (ax)^2 + \cdots + (ax)^{m-1})(1 - ax)$$

となり，前の補題より，$x \in \mathrm{rad}R$ で，$I \subseteq \mathrm{rad}(R)$ となることがわかる． □

定義 2.27. 環 R が**局所環** (local ring) であるとは，$\mathrm{rad}(R)$ が一意な極大イデアルであるときを言う.

例 5. 局所環 R の非可逆元全体から成るイデアル I による剰余環 R/I は特に斜体である.

可換環のときにはイデアルの左右を区別しないことから可換環が局所環であることはその環が唯一の極大イデアルを持つことと同値である．例えば，体は自明なイデアルしか持たないことを思い出せば，体というのは $\{0\}$ を唯一の極大イデアルとする局所環である.

2.3 加群

定義 2.28. R を環，$(M, +)$ を加法群とする．M とスカラー乗法と呼ばれる R の M への（左）作用

$$(*) \colon R \times M \to M; \quad (r, m) \mapsto r * m$$

の組で，任意の $r, r_1, r_2 \in R$，$m, m_1, m_2 \in M$ に対して，

- $r * (m_1 + m_2) = r * m_1 + r * m_2$
- $(r_1 + r_2) * m = r_1 * m + r_2 * m$
- $(r_1 \cdot r_2) * m = r_1 * (r_2 * m)$
- $1_R * m = m$

を満たすものを**左 R 加群** (left R-module) という． スカラー乗法について環 R を右から作用させると，**右 R 加群** (right R-module) も定義できる．また，$(*)$ を省略して，しばしば $r*m$ を rm と書く．

定義 2.29. R,S を環とし，$(M,+)$ を加法群とする．次の条件を満たすとき加法群 M を (R,S) **両側加群** ((R,S)-bimodule) であるという．

(1) M は左 R 加群
(2) M は右 S 加群
(3) 任意の $m\in M, r\in R, s\in S$ について，$r(ms)=(rm)s$ が成り立つ．

補足 1. 左 R 加群の同値な定義として，上で定義したスカラー乗法の代わりに，加法群 M に環準同型

$$\rho\colon R\to \mathrm{End}(M)$$

を指定し，このとき 組 (M,ρ) を左 R 加群とするという定義もある．これは,

$$R\times M\to M;\quad (r,m)\mapsto \rho(r)(m)$$

なる対応を与え,

$$r*m\coloneqq\rho(r)(m)$$

と表すことにより同じく記すことができる． このとき $\rho(r)(m)$ を m に r を作用させた結果という．こうすると元の定義はそれぞれ $\rho(r)\in\mathrm{End}(M)$ であること， ρ が加法,積，単位元を保つこと（R から $\mathrm{End}(M)$ への環準同型写像となる条件）を言い換えていることが分かる．環準同型 ρ を M における環 R の**表現** (representation) と呼ぶ．したがって，左 R 加群というのは，加法群 M 上に 環 R の表現を与えたものである．

例 6. R を環，M を加法群とする．

(1) R が斜体のときは，左 R 加群は左 R ベクトル空間であり，右 R 加群は右 R ベクトル空間である．
(2) R が体のときには，R 加群は R 上のベクトル空間である．したがって，R 加群の概念はベクトル空間の一般化になっている．
(3) R 自身はスカラー乗法を通常の乗法で定義すれば，作用の向きによって，左または右 R 加群の構造を持っている．このような加群をそれぞれ**正則左加群** (regular left module)，**正則右加群** (regular right module) または単に**正則加群** (regular module) という．

(4) $M = \{0\}$ として，加法を $0 + 0 = 0$，スカラー乗法を $a \in A, a0 = 0$ と定義すると，$\{0\}$ は R 加群になる．これを **零加群**と呼ぶ．通常 $\{0\}$ を 0 と書く．

(5) K^n を体 K 上の n 次元ベクトル空間，$M_n(K)$ を成分が K の元である n 次正方行列全体から成る環とする．$M_n(K)$ の作用を行列の乗法によって定めれば，K^n を列ベクトルとみなした場合には左 $M_n(K)$ 加群，行ベクトルとみなした場合には右 $M_n(K)$ 加群となる．

(6) $M_1, \ldots, M_n$ を左 R 加群とする．するとこれらの直積集合 $M_1 \times \cdots \times M_n$ は要素ごとの演算によって自然に R 加群の構造になる．この加群を $M_1, \ldots, M_n$ の**直積加群** (direct product module) または，単に**直積**という．

定義 2.30. R 加群 M の加法群としての部分加法群 N が R の作用について閉じているとき，すなわち

$$r \in R,\ n \in N \implies r * n \in N$$

となるとき，N を M の R **部分加群** (R-submodule) とか，**部分** R **加群**などという．

例 7. (1) R 加群 M に対して零加群 0 と M 自身は常に部分加群になっている．これを**自明な部分加群**という．自明な部分加群でない場合は**非自明な部分加群**という．

(2) R 加群 M の部分加群 N と L について，$N + L = \{a + b \mid a \in N, b \in L\}$ も再び M の部分加群となる．

(3) R 加群 M の部分加群 N と L について，$N \cap L$ も再び M の部分加群となる．

(4) R 加群 M について，L と N を部分加群とし，$L \subseteq N \subseteq M$ であるとき，剰余加群 N/L は M/L の部分加群になる．

定義 2.31. R 加群 M の非自明な部分加群のうち極大なものを**極大部分加群**という．すなわち M の部分加群 N が極大部分加群であるとは，$M \neq N$ であり，ある部分加群 K が存在して $N \subseteq K \subseteq M$ ならば $K = N$ または $K = M$ となるときをいう．

今後 R 加群 M を線形結合のような形であらわしておくと便利なことがあるのでここで紹介しておく．M の任意の元は，適当な部分集合 $R' \in R$，$M' \in M$ を取ると，R' を係数とした M' の線形結合で記すことができる．具体的には，任意の $m \in M$ に対して，$r_1, r_2, \ldots, r_n \in R', m_1, m_2, \ldots, m_n \in M'$ が存在して，

$$m = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n$$

と書くことができる．これの集合を簡単に $R'M'$ と書くことにする．また，右 R 加群の場

合も同様に考える．M を左 R 加群とし．M' を空でない M の部分集合とすると，RM' は M の R 部分加群になる．RM' のことを M' で**生成された M の部分加群**という．また，$RM' = M$ が成り立つなら，M' は M を**生成する**といい，このとき M' を M の**生成系** (system of generator) などという．このとき M' が有限集合なら，R 加群 M を**有限生成** (finitely generated) または**有限型** (of finite type) などという．M' の任意の互いに異なる有限個の元 $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M'$ に対して，$r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots r_n m_n = 0$ のとき，$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ ならば M' は**一次独立** (linearly independent) であるという．また，M' を M の生成系, すなわち $RM' = M$ であるとき，M の任意の元 $m \in M$ が M' の有限個の元 $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M'$ によって $m = \sum_i^n r_i m_i$ の形に一意に書けるとき，$\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ は M の**自由基底** (free basis) または単に**基底** (basis) という．このとき M' を M の基底と言ったりもする．特に M' が生成系かつ一次独立なことと M' が基底であることが同値である．R 加群 M が基底を持つとき，M は**自由加群** (free module) であるという．また，R が可換環で R 加群 M が有限生成自由加群とすると，M は有限個の元からなる基底を持ち，その元の数が基底の取り方に依らない．これを M の**階数** (rank) と呼び $\mathrm{rank}(M)$ と書く．

1 つの元で生成されている加群のことを**巡回加群** (cyclic module) という．例えば， 巡回左 R 加群 M と言えば， ある $m \in M$ が存在して， $M = R\{m\}$ のような形をしている．これを単に

$$M = Rm = \{rm \mid r \in R\}$$

と書く．例えば，零加群や正則加群は巡回加群になっている．また，R 加群 M を考えたとき，その部分加群として巡回加群が存在するのは明らかである．すると，任意の加群は巡回部分加群の集合で生成される．すなわち，R 加群 M の生成系を X とすれば，$M = RX$ であるが,

$$M = \sum_{x \in X} Rx$$

と書くと巡回部分加群の和として任意の加群を記すことができる．非零な R 加群 M が非自明な部分加群を持たないとき，M を**単純加群** (simple module) という．単純加群は巡回加群である．このことより非零な R 加群 M が単純加群であることは，任意の $0 \neq m \in M$ について $M = Rm$ となることと同値である．

I が環 R の左イデアルとすると, R の積をスカラー乗法として I は左 R 加群の構造を持つ．左イデアルが一つの元 $a \in R$ によって生成されているとすると，$Ra = \{ra \mid r \in R\}$ が左 R 加群になっている．右イデアルの場合も同様に右 R 加群になる．これは一つの元で生成されているイデアルかつ一つの元で生成されている加群でもあるので，環としては

単項イデアルであり，加群としては巡回加群になっている．

I が R の左イデアル，M を左 R 加群とすると次が M の部分加群になる．

$$IM = \{r_1m_1 + \cdots + r_nm_n \mid r_i \in I, m_i \in I\}$$

右の場合も同様に，

$$MI = \{m_1r_1 + \cdots + m_nr_n \mid r_i \in I, m_i \in I\}$$

が部分加群になる．これは先の例で挙げた M の部分集合をとった場合の生成された部分加群とは異なるので注意する．環 R としてイデアル I をとれば，それの線形結合が部分加群になるということである．

定義 2.32. R を環，M を左 R 加群とし，M の部分加群を N とする．M, N を加法群としてみたときの剰余加法群 M/N に M から誘導されるスカラー乗法の演算を定めるとこれは左 R 加群の構造を持つ．具体的には，任意の $r \in R, [x] \in M/N$ について，

$$r * [x] := [r * x]$$

と定める．これは加法とともに代表元の取り方によらず well-defined になる．右 R 加群もスカラー乗法の作用を逆にすることで同様に定めることができる．M/N をこのように R 加群とみなしたものを N を法とした M の**剰余加群**または**商加群** (quotient module) と呼ぶ．

注意 9. 正則加群 R については，R の部分加群がイデアルであった．このとき，R のイデアル I について，R/I は剰余加群となる．なお，両側イデアルであれば剰余環の構造を持てる．さらに，正則加群 R における極大部分加群を I とすると，剰余加群 R/I が単純加群となる．また，左 R 加群 S が単純加群であることと，$S \cong R/I$ となることが同値となる．なお，R 加群 M の極大部分加群 N を考えた場合についても M/N が単純加群となる．

定義 2.33. R 加群 M, N に対し，R 加群の**準同型** (homomorphism)，もしくは R **準同型** (R-homomorphism) とは加法群の準同型 $f : M \to N$ であって，以下の条件を満たすときをいう; 任意の $r \in R$, $m, m' \in M$ について

- $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
- $f(r *_M m) = r *_N f(m)$.

この性質を R 上の**線型性**と言ったりする．R 加群の準同型 f が全単射であるときは，逆写像 f^{-1} も R 加群の準同型である．このとき f は R 加群の**同型写像** (isomorphism) ないしは R **同型写像** (R-isomorphism) と呼ばれる．右 R 加群の場合も同様に定義する．M から M 自身への準同型は**自己準同型写像** (endomorphism) という．更に同型であれば**自己同型** (automorphism) という．環の場合と同様に同型写像が存在する場合は 2 つの加群 M と N は**同型** (isomorphic) であるといい，

$$M \cong N$$

と書く．

注意 10. R が体のとき，R 準同型の定義は線型写像の定義と同じである．また，準同型の R の作用は右からも同様に考えられる．

例 8. M を R 加群，N を M の部分 R 加群として，剰余加群 M/N を構成した場合，$\pi : M \to M/N; x \mapsto [x]$ なる準同型が自然についてくる．この π を**自然な準同型**という．これは明らか全射であるので，**自然な全射**ということもある．したがって，剰余加群を単に M/N という加群でなく，自然な準同型 $\pi : M \to M/N$ と一緒に，組 $(M/N, \pi)$ としてみると見通しが良くなる．

R 加群の準同型における**核**と**像**は一般の準同型の場合と同じように考えてよい．R 加群準同型を $f\colon M \to N$ とすると $\mathrm{Ker}(f)$ は M の部分加群になり，$\mathrm{Im}(f)$ は N の部分加群となっている．さらに，これに加えて f の**余核** (cokernel) とは剰余加群 $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f)$ と定義する．また核と余核については付随する加群準同型をセットで考えると見通しが良くなる．核に関しては $i\colon \mathrm{Ker}(f) \to M$ なる包含写像が存在し，余核に関しては自然な全射 $p\colon N \to N/\mathrm{Im}(f)$ がある．

また，核と像の一般的な命題として次が成り立つ．

命題 2.34. $f\colon M \to N$ を R 加群の準同型とするとき，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Ker}(f) = 0 \iff f$ は単射
(2) $\mathrm{Im}(f) = N \iff f$ は全射

証明. (2) は定義より明らかであるので (1) を示す．もし, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ であると仮定する．$a, b \in M$ について $f(a) = f(b)$ とする．このとき, $f(a-b) = 0$ だから $a - b \in \mathrm{Ker}(f)$ である．よって $a - b = 0$ なので $a = b$ である．従って, f は単射である．逆に, f を単射であるとする．f は加法群としての準同型なので $f(0) = 0$ である．よって, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

が示された. □

また，加群に対する重要な定理として，次の準同型定理を 3 つ紹介しておく.

定理 2.35 (第一準同型定理)**.** $f\colon M \to N$ を R 加群の準同型とするとき，次が成り立つ.

$$M/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

証明. R 加群の準同型写像 $f\colon M \to N$ は, R 加群の準同型写像

$$\overline{f} : M/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f); \quad x + \mathrm{Ker}(f) \longmapsto f(x)$$

を誘導する．この $\overline{f}$ は全単射であることが簡単に示される. □

定理 2.36 (第二準同型定理)**.** M を R 加群とし，N, L を M の部分加群とすると次が成り立つ.

$$(N + L)/L \cong N/(N \cap L)$$

証明. N から $(N + L)/L$ への自然な全射準同型が存在する．このとき，この準同型の核は N の元かつ L の元であるのようなものである．すなわち，$N \cap L$ となる．したがって，第一準同型定理より $(N + L)/L \cong N/(N \cap L)$ が成り立つ. □

定理 2.37 (第三準同型定理)**.** M を R 加群とし，N, L を M の部分加群として，$L \subseteq N \subseteq M$ とすると次が成り立つ.

$$(M/L)/(N/L) \cong M/N$$

証明. 任意の $m \in M$ について, $m+L \in M/L$ から $m+N \in M/N$ への自然な全射準同型が存在する．この準同型写像の核は N/L なので, 準同型定理より $(M/L)/(N/L) \cong M/N$ を得る. □

2.4 K 代数と表現

本節を通して, K は体であるとする．体 K 上の加群は K 上のベクトル空間であることを思い出せば，体 K 上の代数 A は積が定義された K 上ベクトル空間になる．体 K 上の代数については次の用語と例を紹介しておこう.

定義 2.38. 体 K 上の代数 A は A が K 上ベクトル空間として有限次元であるとき，**有限次元代数** (finite-dimentional algebra) または**有限次元 K 代数** (finite-dimentional K-algebra) とよばれる．このときの次元を $\dim(A)$ と表す.

例 9. (1) 体 K は K の乗法と単位元 $1 \in K$ で代数になる．

(2) 体 K として，X を変数とする K 係数の 1 変数多項式全体の成すベクトル空間 $K[X]$ は通常の多項式の乗法と単位元 $1 \in K$ で代数になる．

(3) V を K 上のベクトル空間として，V の自己準同型全体の成す空間 $\mathrm{End}_K(V)$ は一次変換の合成と恒等写像を単位元として代数になる．

(4) n を自然数として，K 上の n 次正方行列全体の成すベクトル空間 $M_n(K)$ は通常の行列の乗法と単位行列で代数になる．

(5) n を自然数として，代数 A 上の n 次正方行列全体の成すベクトル空間 $M_n(A)$ は通常の行列の乗法と単位行列で代数になる．

(6) A が代数であるとき，A 代数の乗法の順序を逆にしたものを A^{op} と表し，これを**反転代数**という．

ここまでで，代数の定義をしたが一般に代数は積の構造が入るためその全体像がよくわからないことがある．したがって，性質がよく知られているものに関係づけて（つまり表現させて）考えるとその代数を理解しやすくなる．この“性質がよく知られているもの”とは代数の場合は一般に，ある K 上のベクトル空間 M 上の自己準同型全体の成す代数 $\mathrm{End}_K(M)$ のことである．この代数の積は線形写像の合成によって与えられているため，それの表現行列を考えれば具体的に計算もできる．これと K 代数を“関係付ける”ためには代数の間の準同型を考えれば良いだろう．

定義 2.39. A と B を K 代数とする．環準同型 $f\colon A \to B$ が **K-代数準同型** (K-algebra homomorphism) とは，f が K 線形写像の時をいう．f が全単射であるとき，f を同型写像といい，また，同型写像が存在するとき A と B は同型であるという．このとき，記号で $A \cong B$ と書く．

K 代数 A の**表現** (representation) とは K 上ベクトル空間 M と K 代数準同型 $\rho\colon A \to \mathrm{End}_K(M)$ の組 (M, ρ) のことである．ベクトル空間 M を ρ の**表現空間** (representation space) と呼ぶ．紛らわしいが，K 代数準同型 ρ を A の $\mathrm{End}_K(M)$ による表現と言ったり，A の M 上の表現と呼んだりする．また，M 自身を単に表現と言ったりすることもあるので注意する．定義より，表現は単に K 代数 A 上の左加群である．したがって加群で成立する性質は条件に注意してそのまま持ってきて良い．また, 作用の向きを逆にすることで右 A 加群も扱うことができる．すなわち，$\rho\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_K(M)$ として表現の準同型を定めて，$\rho(a)(m) = ma$ として A が右から作用するようにするということである．以降，K 代数 A の表現といったら，右 A 加群として扱うとし, 加群と言ったら右加群を考

える．加えて，強調したいときを除いて表現とはわざわざ言わずに，K 代数 A 上の加群 M とか A 加群のような言い方をする．

定義 2.40. A を K 代数とする．A 加群 M が**有限次元** (finite-dimensional) とは M が K 上ベクトル空間として有限のときをいう．このときの次元を $\dim(M)$ と表す．

命題 2.41. A を有限次元 K 代数とし，M を A 上の加群とする．M が有限生成 A 加群であることと，M が有限次元 A 加群であることは同値である．

証明. M が K 上ベクトル空間として，$x_1, \ldots, x_r$ の元で生成されているとすると，明らかに M は $x_1, \ldots, x_r$ を生成系として右 A 加群として生成されている．逆に，M が右 A 加群として $m_1, \ldots, m_s$ で生成されているとすると，A の K 上の基底を $a_1, \ldots, a_n$ とすれば，$\{m_i a_j \mid i \in \{1, \ldots, s\},\ j \in \{1, \ldots, n\}\}$ が M の K 上ベクトル空間としての基底をなす． □

補題 2.42 (中山の補題)**.** A を K 代数とし，M を有限生成 A 加群，$I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ を A の両側イデアルとする．$MI = M$ ならば $M = 0$ となる．

証明. $M = MI$ かつ，$M = m_1 A + \cdots + m_s A$，すなわち M が $\{m_1, \ldots, m_s\}$ を生成元として生成されているとする．s についての帰納法を考える．$s = 1$ とすると，$m_1 A = m_1 I$ となり，ある $x_1 \in I$ で $m_1 = m_1 x_1$ となる．したがって，$m_1(1 - x_1) = 0$ となり，$1 - x_1$ は可逆なので $m_1 = 0$ となる．結果として $M = 0$ となる．次に $s \geq 2$ とする．$M = MI$ より，$m_1 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_s x_s$ を満たすような $x_1, \ldots, x_s \in I$ が存在する．したがって，$m_1(1 - x_1) = m_2 x_2 + \cdots + m_s x_s$ となり，$1 - x_1$ が可逆なので，$m_1 \in m_2 A + \cdots + m_s A$ となる，これは $M = m_2 A + \cdots + m_s A$ となることを示しており，これは仮定に反する．したがって，$M = 0$ となる． □

系 2.43. A を有限次元 K 代数とすると $\mathrm{rad}(A)$ は冪零イデアルになる．

証明. 定義より，$\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(A)) = (\mathrm{rad}(A))^2 \subseteq \mathrm{rad}(A)$ である．したがって，$m \geq 1$ で，

$$A \supseteq \mathrm{rad}(A) \supseteq (\mathrm{rad}(A))^2 \supseteq \cdots \supseteq (\mathrm{rad}(A))^m \supseteq \cdots$$

となる．いま，A が有限次元であることより，$(\mathrm{rad}(A))^m = (\mathrm{rad}(A))^m \mathrm{rad}(A)$ が成り立つ地点が存在するので，中山の補題より $(\mathrm{rad}(A))^m = 0$ となる． □

A を K 代数とする．右 A 加群 M, N について M から N へのすべての A 加群の準同型写像の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ と表す．$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は加法とスカラー乗法を

$f,g \in \mathrm{Hom}_A(M,N), x \in M, \lambda \in k$ について，$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (f\lambda)(x) = f(x\lambda) = f(x)\lambda$ として定めると K 上ベクトル空間の構造を持つ．また繰り返しになるが，$\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M,M)$ は M のすべての A 加群の自己準同型写像を元とする K 上ベクトル空間で写像の合成を積として K 代数の構造を持っている．

A を K 代数とし，Λ を添え字集合とする．A 加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，このときの直積集合

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\}$$

は成分ごとの和，スカラー倍，A からの作用で再び A 加群となる．すなわち，任意の $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (m'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, $c \in K$, $a \in A$ について各演算を次で定義する．

- $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (m'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (m_\lambda + m'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$
- $c(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (cm_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$
- $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}a := (m_\lambda a)_{\lambda\in\Lambda}$

これを $M_\lambda \quad (\lambda\in\Lambda)$ の**直積**とよぶ．添え字集合 Λ が有限集合とき,（外部）直和を定義する．右 A 加群 $M_1,\ldots,M_r$ $(r \geq 1)$ の**（外部）直和** (outer direct sum) は K 上ベクトル空間の直和 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ に A 加群としての作用を $x_1 \in M_1,\ldots,x_r \in M_r$，$a \in A$ について，$(x_1,\ldots,x_r)a = (x_1a,\ldots,x_ra)$ によって定めた右 A 加群と定義する．特に M^r によって, A 加群 M の r 個の直和 $M\oplus\cdots\oplus M$ を表すことにする．また, $r=0$ のときは零加群を表すとする．右 A 加群 M に対してその部分加群 $M_1,\ldots,M_r$ $(r\geq 1)$ を考え，それらの元 $m_1 \in M_1,\ldots,m_r \in M_n$ で M の任意の元 $m \in M$ を一意に $m = m_1+\cdots+m_r$ として書けているなら, $M = M_1 \oplus\cdots\oplus M_r$ と書く．このとき, $M_1\oplus\cdots\oplus M_r$ を M の部分加群の $M_1,\ldots,M_r$ $(r \geq 1)$ の**（内部）直和** (inner direct sum) と呼ぶ.

定義 2.44. A を K 代数とする．A 加群 M が**直既約** (indecomposable) であるとは M が零加群でなく，2 つの零加群でない M の部分加群 N，L で $M = N \oplus L$ と書けないときをいう．直既約でない加群は**直可約** (decomposable) という．また，K 代数 A が直既約加群の内部直和で書けるとき，これを A の**直既約分解**という．

すべての単純加群は直既約となる．しかし，逆は一般には成り立たない．また K 上のベクトル空間が K 加群として直既約であることと次元が 1 であることが同値となる．また，単純加群の直和と同型な加群は**半単純** (semisimple) と呼ばれる．この定義から半単純かつ直既約であることと単純であることが同値となり，また，半単純加群の部分加群が再び半単純加群であることも定義より明らかである.

注意 11. 環 R 自身を左または右 R 加群としてみたとき，それが半単純であればそれを**半単純環**という．なお代数 A が半単純とはそれが環として半単純である時をいう．

補題 2.45 (シューアの補題)**.** S，S' を右 A 加群とし，$f\colon S \to S'$ を非零な A 加群準同型とすると次が成り立つ．

- S が単純加群なら，f が単射になる．
- S' が単純加群なら，f が全射になる．
- S と S' が単純加群なら，f が同型になる．

証明. $f\colon S \to S'$ が A 加群準同型より，$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ はそれぞれ S と S' の部分加群になる．S が単純加群のとき，S は非自明な部分加群を持たないから，$\mathrm{Ker}(f) = 0$ となる．したがって，このとき f は単射である．同様に S' が単純加群のときは $\mathrm{Im}(f) = S'$ となるので，このとき，f は全射である．□

系 2.46. K を代数閉体とし，A を K 代数とする．A 加群 S が単純加群のとき，K 代数として $\mathrm{End}_A(S) \cong K$ となる．

証明. シューアの補題より，$\mathrm{End}_A(S)$ における非零な元は可逆となる．したがって，このとき $\mathrm{End}_A(S)$ は斜体となる．さらに，S は単純加群なので，S は巡回加群でもあり，K 上ベクトル空間としての次元 $\dim_K(S)$ は有限次元となる．したがって，$\dim \mathrm{End}_A(S)$ も有限次元となり，また，任意の非零な元 $\varphi \in \mathrm{End}(S)$ について元 $1_s, \varphi, \varphi^2, \ldots$ は K 上線形独立である．したがって，$f(\varphi) = 0$ を満たすような，非零な既約多項式 $f(t) \in K[t]$ が存在する．K は代数閉体であることから，この f の次数は 1 となり，また φ は S 上ではスカラー $\lambda_\varphi \in K$ の積として振る舞う．対応としては $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ となる．したがって，K 代数として $\mathrm{End}_A(S)$ と K が同型となる．□

また，いくつか用語の紹介をしておく．K 代数 A の元 e が**冪等元** (idempotent) とは，$e^2 = e$ となるときをいう．e が冪等元のときは $1_A - e$ もまた A の冪等元になり，$e(1_A - e) = 0_A = (1_A - e)e$ が成り立つ．このように 2 つの冪等元 e と f について $ef = 0_A = fe$ となるとき，この 2 つの元は**直交** (orthogonal) するという．さらに冪等元 e が A のすべての元 a について $ea = ae$ となるとき，これを**中心的** (central) という．すべての K 代数 A は常に自明な冪等元 0_A と 1_A を持ち，これらは中心的である．また，ゼロでない冪等元 e が**原始的** (primitive) とは，互いに直交する 2 つの冪等元 $e_1, e_2 \in A$ に対し，$e = e_1 + e_2$ ならば $e = e_1$ または $e = e_2$ が成り立つときをいう．有限次元 K 代数 A において，$1 \in A$ は原始的直交冪等元 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を用いて，$1 = e_1 + \cdots + e_n$ と

書くことができる．このとき，A を右 A 加群としてみたときこの加群を A_A と書くとすると，A_A は直和分解

$$A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$$

を持つ，このような $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を**原始的直交冪等元の完全系**という．なお，有限次元代数は常に原始的直交冪等元の完全系を持つ．

注意 12. K 代数 A 自身を A 加群としてみたとき，左，右，両側加群をそれぞれ ${}_AA$, A_A，${}_AA_A$ と書く．また，A 加群 M についても今後同様の表記を用いることにする．

冪等元および原始的元について次が成り立つ．

補題 2.47. A を K 代数とし，$e \in A$ を冪等元とする．M を右 A 加群とすると次が成り立つ．

(1) K 線形写像

$$\theta_M : \mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$$

を $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ について $\varphi \mapsto \varphi(e) = \varphi(e)e$ によって定義する．また，この写像は右 eAe 加群の同型写像となる．

(2) 右 eAe 加群の同型写像 $\theta_{eA} \colon \mathrm{End}(eA) \to eAe$ が K 代数の同型を誘導する．

補題 2.48. A を K 代数，$0 \neq e \in A$ を冪等元とする．このとき，次は同値である．

(1) e が原始的である．
(2) eA は直既約右 A 加群である．
(3) Ae は直既約左 A 加群である．

したがって，有限次元 K 代数 A は原始的直交冪等元の完全系によって常に，直既約な A 加群への分解が可能である．

本研究を通して基本的な主題は，ある代数 A 上の加群の分解を計算するということである．この計算を行うためには，そもそも，考えている A 加群が分解できるのか，できるとしたらその分解は一意であるかという問題が出てくる．このとき，考えている代数が有限次元代数であれば，次の Krull-Schmidt の定理によって，この代数上の加群における分解の存在と，さらには分解の一意性が保証される．したがって，本研究ではこの定理を基に加群の分解理論を構築することになる．

定理 2.49 (Krull–Schmidt の定理)**.** K を体，A を有限次元 K 代数とするとき次が成り立つ.

(1) すべての有限次元 A 加群 M は，M の直既約部分加群 $M_1, \dots, M_m$ で直既約分解

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$$

を持つ.

(2) $M_1 \dots M_m$，$N_1, \dots, , N_n$ が A の直既約加群であるとする．このとき A 加群の同型

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \cong \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$$

が存在するとき，$m = n$ であり，$M_i \cong N_{\sigma(i)}$ となるような $\{1, \dots, n\}$ の置換 σ が存在する.

証明. (1) は任意の A 加群 M について，$\dim_K(M)$ が有限であることから従う．(2) の一意性の証明は，例えば [SY11] を見よ. □

K 代数 A が原始直交冪等元の完全系 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を持つとする．$i \neq j$ に対し，$e_iA \neq e_jA$ が成り立つとき，A を**基本的** (basic) という．また，K 代数 A が二つの K 代数の直積となっていないとき**連結** (connected) であるという．また，A 加群 M が基本的とは，M が互いに非同型な直既約加群の直和であることである.

定義 2.50. A 加群 M に対して，すべての極大部分加群の共通部分を M の**根基** (radical) といい，$\mathrm{rad}(M)$ と表す．また，A 加群 M のすべての単純部分加群により生成される M の部分加群を M の**底** (socle) といい，$\mathrm{soc}(M)$ で表す.

注意 13. $\mathrm{soc}(M)$ は半単純加群になる.

また，K を代数閉体とし，任意の有限次元 K 代数 A にとすると次が同値となる.

- 右 A 加群 A_A が半単純である.
- すべての右 A 加群が半単純である.
- 左 A 加群 ${}_AA$ が半単純である.
- すべての左 A 加群が半単純である.
- $\mathrm{rad}(A) = 0$ となる.

命題 2.51. K を代数閉体とし，A を K 代数とする．L，M，N を有限次元右 A 加群とする．根基について次が成り立つ．

(1) ある元 $m \in M$ が $\mathrm{rad}(M)$ に属していることと，任意の単純右 A 加群 S と任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(M, S)$ に対して $f(m) = 0$ となることが同値である．
(2) $\mathrm{rad}(M \oplus N) = \mathrm{rad}(M) \oplus \mathrm{rad}(N)$ が成り立つ．
(3) $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ とすると $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$ が成り立つ．
(4) $M\mathrm{rad}(A) = \mathrm{rad}(M)$ となる．
(5) L と M が N の部分加群とすると．$L \subseteq \mathrm{rad}(N)$，$L + M = N$ であれば，$M = N$ となる．

証明. (1)：$L \subseteq M$ を極大部分加群とすると，M/L が単純加群 S と同型になることから明らか．

(2)：$M \oplus N$ の任意の元が $m \in M$ と $n \in N$ で $t = m + n$ と書けているとする，(1) より，単純加群 S について準同型 $f \in \mathrm{Hom}_A(M \oplus N, S)$ を考えると，$t \in \mathrm{rad}(M \oplus N)$ ならば，$f(t) = f(m) + f(n) = 0$ となる．したがって $f(m) = 0$ および $f(n) = 0$ より，主張が成り立つ．

(3)：ある単純加群 S に対して，$h = k \circ f$ を満たすような準同型 $h \in \mathrm{Hom}_A(M, S)$，$k \in \mathrm{Hom}_A(N, S)$ を考える．元 $m \in M$ が $\mathrm{rad}(M)$ に属しているとすると，(1) より $h(m) = 0 = k \circ f(m)$ となる．このとき，$f(m) \in \mathrm{rad}(N)$ であるので $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$ が成り立つ．

(4)：$M\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ を示す．任意の元 $m \in M$ を取り，$a \in A$ について $f_m(a) = ma$ となるような，右 A 加群の準同型 $f_m \colon A \to M$ を定義する．(3) の主張から $a \in \mathrm{rad}(A)$ について $f_m(a) = ma \in f_m(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ となり，ゆえに $M\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{rad}(M)$ となる．次に $M\mathrm{rad}(A) \supseteq \mathrm{rad}(M)$ を示す．代数 $A/\mathrm{rad}(A)$ と A 加群 $M/M\mathrm{rad}(A)$ を考える．$(M/M\mathrm{rad}(A)) \cdot \mathrm{rad}(A) = 0$ より，加群の作用を $(m+M\mathrm{rad}(A))\cdot(a+\mathrm{rad}(A)) = ma+M\mathrm{rad}(A)$ として定めれば, この加群 $M/M\mathrm{rad}(A)$ が $A/\mathrm{rad}(A)$ 上の加群となる．また $\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A)) = 0$ より, これは半単純であり, 有限次元 $A/\mathrm{rad}(A)$ 加群 $M/M\mathrm{rad}(A)$ は単純加群の直和になっている．単純加群の根基は 0 であるので, (2) より $\mathrm{rad}(M/M\mathrm{rad}(A)) = 0$ となる．(3) より, 標準全射 $\pi \colon M \to M/M\mathrm{rad}(A)$ にを考えれば，$\mathrm{rad}(M)$ は 0 に行く．すなわち $\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = M\mathrm{rad}(A)$ となり主題が成り立つ．

(5)：$L \subseteq \mathrm{rad}(N)$ および $M \neq N$ で $L + M = N$ であると仮定する．N が有限次元より，M が $N \neq X$ となるような N の極大部分加群の部分加群となる．したがって，

$L \subseteq \mathrm{rad}(N) \subseteq (X)$ で，$N = L + M \subseteq X + M = X$ となり，これは仮定と矛盾する． □

系 2.52. K を代数閉体とし，A を K 代数とする．M を有限次元 A 加群とすると，次が成り立つ．

(1) 右 A 加群 $M/\mathrm{rad}(M)$ は半単純であり，それは K 代数 $A/\mathrm{rad}(A)$ 上の加群になっている．

(2) M/L が半単純であるような，M の部分加群を L とすると，$\mathrm{rad}(M) \subseteq L$ が成り立つ．

証明. (1)：$\mathrm{rad}(M) = M\mathrm{rad}(A)$ より $(M/\mathrm{rad}(M)) \cdot \mathrm{rad}(A) = 0$ となる．ゆえに，A 加群 $M/\mathrm{rad}(M)$ は，加群の作用を $(m + M\mathrm{rad}(A)) \cdot (a + \mathrm{rad}(A)) = ma + M\mathrm{rad}(A)$ とすれば，$A/\mathrm{rad}(A)$ 上の加群である．$A/\mathrm{rad}(A)$ は半単純であるので，加群 $M/\mathrm{rad}(M)$ も半単純になる．

(2)：標準全射 $\pi\colon M \to M/L$ を考えれば，$\pi(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(M/L) = 0$ が成り立つので，$\mathrm{rad}(M) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = L$ となる． □

定義 2.53. M を A 加群とする．加群 M の**頂点** (top) とは,

$$\mathrm{top}(M) = M/\mathrm{rad}(M)$$

で定義する．$\mathrm{top}(M)$ は右 $A/\mathrm{rad}(A)$ 加群にもなり，その時の加群の作用は

$$(m + \mathrm{rad}(M)) \cdot (a + \mathrm{rad}(A)) = ma + \mathrm{rad}(M)$$

で定義する．

また，$f\colon M \to N$ を A 加群準同型としたとき，$f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$ となるので，f は $A/\mathrm{rad}(A)$ 加群の準同型 $\mathrm{top}(f)\colon \mathrm{top}(M) \to \mathrm{top}(N)$ を誘導し,

$$\mathrm{top}(f)(m + \mathrm{rad}(M)) = f(m) + \mathrm{rad}(N)$$

で定義する．

系 2.54. M，N を A 加群とする．

(1) A 加群準同型 $f\colon M \to N$ が全射であることと, 準同型 $\mathrm{top}(f)\colon \mathrm{top}(M) \to \mathrm{top}(N)$ が全射であることが同値となる．

(2) S を単純 A 加群とすると $S\mathrm{rad}(A) = 0$ かつ S が単純 $A/\mathrm{rad}(A)$ 加群となる．

(3) M が半単純であることと，$\mathrm{rad}(M) = 0$ であることが同値となる．

証明. (1)：$\mathrm{top}(f)$ が全射であると仮定すると，$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{rad}(N) = N$ となる．ゆえに f が全射となり，$\mathrm{Im}(f) = N$ となる．逆に，f が全射であると仮定すると $f(M) = N$ より，$f(M/\mathrm{rad}(M)) = N/\mathrm{rad}(N)$ となるので成り立つ．

(2)：$S \neq 0$ かつ S が単純加群であることから，S は巡回加群であり，中山の補題より $S \neq S\mathrm{rad}(A)$ となる，したがって，$S\mathrm{rad}(A) = 0$ となり，従う．

(3)：M が半単純であるとすると，(2) から $\mathrm{rad}(M) = 0$ が言える．逆は $\mathrm{rad}(M) = 0$ であり，A 加群 $M/\mathrm{rad}(M)$ が半単純であることから M が半単純であることが示せる． □

定義 2.55. K 代数 A が**局所代数** (local algebra) とは，A が一意な極大左イデアルを持つ，または極大右イデアルを持つことである．すなわち $\mathrm{rad}(A)$ が A の一意な極大イデアルであるときを言う．

補題 2.56. A を有限次元 K 代数とすると次が同値となる．

(1) A が局所代数である．
(2) A のすべての非可逆な元の集合が両側イデアルになる．
(3) 任意の $a \in A$ について，a または $1 - a$ が可逆になる．
(4) A が二つの冪等元 1 と 0 だけを持つ．
(5) K 代数 $A/\mathrm{rad}(A)$ が K と同型になる．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2)：A が局所代数なので，$\mathrm{rad}(A)$ が A の一意な真の極大右イデアルになる．つまり，$x \in \mathrm{rad}(A)$ は x が右逆元を持たない場合にのみ成り立つ．したがって，右可逆な要素 $x \in A$ はすべて可逆であると考えることができる．実際に，$xy = 1$ ならば $(1 - yx)y = 0$ となる．そして，y もまた右可逆な要素であり，$1 - yx = 0$ となる．そうでなければ，$y \in \mathrm{rad}(A)$ であり，$1 - yx$ は右可逆となるが，$y = 0$ となってしまう．これは矛盾する．これは x が右逆元を持たないときに $x \in \mathrm{rad}(A)$ が成り立つこと，あるいは，x が可逆でないときに $x \in \mathrm{rad}(A)$ が成り立つことを示している．また，左で考えた場合も同様に示せる．よって (2) が従う．

(2) $\Rightarrow$ (3)：$a \in A$ が可逆でないとすると，(2) より $a \in \mathrm{rad}(A)$ となる．このとき，任意の $b \in A$ について，$1 - ab$ が可逆となる．$b = 1$ すれば，このとき，$1 - a$ は可逆になる．$1 - a$ が可逆でないなら，$a \notin \mathrm{rad}(A)$ となるので，a 自身が可逆となる．よって，(3) が従う．

(3) $\Rightarrow$ (4)：$e \in A$ を冪等元なら，$1 - e$ も冪等元となり，$e(1 - e) = 0$ を得る．したがって (3) から e か $1 - e$ が可逆になるので，$e = 0$ または $e = 1$ が従う．

(4) $\Rightarrow$ (5)：$B = A/\mathrm{rad}(A)$ は $\mathrm{rad}(B) = 0$ より半単純な代数となり，このとき 1 と 0 の

みが B の冪等元になる．B のすべての右イデアル I は B の原始的冪等元 e を用いて，単純右イデアル eB の直和になっている．したがって，B 加群 B_B は単純加群となり，K 代数の同型 $\mathrm{End}(B_B) \cong K$ が存在する．よって，K 代数の同型 $B \cong \mathrm{Hom}_B(B_B, B_B) \cong K$ が存在するので，(5) が従う．

(5) $\Rightarrow$ (1)：$A/\mathrm{rad}(A) \cong K$ より，このとき，$A/\mathrm{rad}(A)$ は自明なイデアルしか持たないので，$\mathrm{rad}(A)$ が極大左イデアルかつ極大右イデアルであることは明らか．よって，(1) が従う． □

系 2.57. 冪等元 $e \in A$ が原始的であることと，代数 $eAe \cong \mathrm{End}(eA)$ が二つの冪等元 0 と e だけを持つことが同値となる．すなわち，eAe が局所代数となるとき冪等元が原始的になる．

系 2.58. K を代数閉体，A を K 代数とし，M を A 加群とすると次が成り立つ．

(1) 代数 $\mathrm{End}_A(M)$ が局所代数なら，M は直既約である．
(2) M が有限次元かつ直既約なら，代数 $\mathrm{End}_A(M)$ が局所代数であり，かつ M の自己準同型は冪零または同型となる．

証明. (1)：M が非零な A 加群 X_1 と X_2 で $M = X_1 \oplus X_2$ と分解されているとすると．$i = 1, 2$ で，$u_1p_1 + u_2p_2 = 1_M$ となるような射影 $p_i\colon M \to X_i$ と移入 $u_i\colon X_i \to M$ が存在する．このとき，u_1p_1 と u_2p_2 は $\mathrm{End}_A(M)$ の非零な冪等元であるので，$\mathrm{End}_A(M)$ は局所代数でない．なぜならこのとき，1_M が $\mathrm{radEnd}_A(M)$ に属してしまうからである．これは矛盾するので，M は直既約となる．

(2)：M を有限次元かつ直既約加群であると仮定する．$\mathrm{End}_A(M)$ が局所代数でないとすると，代数 $\mathrm{End}_A(M)$ は非零な冪等元の組 e_1 と $e_2 = 1 - e_1$ を持つ．ゆえに $M \cong \mathrm{Im}(e_1) \oplus \mathrm{Im}(e_2)$ が非自明な直和分解になり，M が直既約であることから，結局 $\mathrm{End}_A(M)$ は局所代数となる．すると，すべての非可逆な A 加群自己準同型 $f\colon M \to M$ は $\mathrm{radEnd}_A(M)$ に属するので，f は冪零な準同型になる．また，$\mathrm{End}_A(M)$ が有限次元であるので，$\mathrm{radEnd}_A(M)$ は冪零になる． □

注意 14. A を有限次元 K 代数とする．Krull–Schmidt の定理より任意の A 加群 M は M の直既約部分加群 $M_1, \dots, M_m$ によって直和分解

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$$

を持っていた．このとき各 M_i について $\mathrm{End}_A(M_i)$ は局所代数となる．

補足 2. **圏** (category) について補足しておく．圏は**対象のクラス** (class of object) と呼ばれる $\mathrm{Obj}(C)$ と**射のクラス** (class of morphism) と呼ばれる $\mathrm{Mor}(C)$，**合成** (composition) と呼ばれる C の射の間に定義される演算 $\circ$ からなる三つ組 $(\mathrm{Obj}(C), \mathrm{Mor}(C), \circ)$ のことを言う，各射 f には**始域** (domain) $\mathrm{dom}(f)$ と**終域** (codomain) $\mathrm{cod}(f)$ と呼ばれる対象がそれぞれただ一つ定まる．$\mathrm{dom}(f) = A$，$\mathrm{cod}(f) = B$ となるとき，$f\colon A \to B$ あるいは $A \xrightarrow{f} B$ と書く．また，$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$ を満たす射の対 (g, f) に対して，この二つの射に合成を適用すると，射 $g \circ f\colon \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ がただ一つ定まる．また，以下の条件を満たす.

- 射の合成は結合的である，つまり射の列
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$
が与えられたとき，
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
が成り立つ.
- 各対象 A には A から A への射のうちで，すべての $f\colon A \to B$ および $g\colon B \to A$ に対して，$f \circ 1_A = f$ かつ $1_A \circ g = g$ を満たすような，射 1_A が存在する．これを**恒等射** (idnetify morphism) と呼ぶ.

圏 C の対象 A，B に対して A を始域，B を終域とする射の集合を $\mathrm{Hom}_C(A, B)$ と表す．この記法を用いれば，射 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ に対して合成 $g \circ f$ は
$$\circ\colon \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_C(X, Z); \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$
となるような二項演算である.

圏 D が圏 C の**部分圏** (subcategory) であるとは，以下の条件が満たされるときをいう.

- $\mathrm{Obj}(D)$ が $\mathrm{Obj}(C)$ の部分クラスである.
- D の任意の対象の組 X と Y に対して，$\mathrm{Hom}_D(X, Y)$ が $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ の部分クラスである.
- D の任意の射 f と g に対して，合成射 $g \circ_D f$ が存在すれば，$g \circ_C f$ も存在し，逆に $g \circ_C f$ が存在すれば $g \circ_D f$ も存在して
$$g \circ_D f = g \circ_C f$$
が成り立つ.

- D の各対象 X に対して恒等射 $1'_X \in \mathrm{Hom}_D(X,X)$ と $1_X \in \mathrm{Hom}_C(X,X)$ が一致する．

圏 C の部分圏 D がについて，任意の D の対象 X,Y について $\mathrm{Hom}_D(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ となるとき，部分圏 D を圏 C の**充満部分圏** (full subcategory) という．

圏 C の対象 $X_1,\ldots,X_n$ の**直和** (direct sum) または**余積** (coproduct) とは，C の対象 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ であって，$j = 1,\ldots,n$ で，

$$u_j \colon X_j \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

となる射の組であって,C の各対象 Z と射の集合 $f_1 \colon X_1 \to Z,\ldots,f_n \colon X_n \to Z$ に対して，$f_j = f \circ u_j$ を満たす，一意な射 $f \colon X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Z$ が存在するときをいう．このような対象 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ は存在すれば同型を除いて一意である．これをしばしば $\bigoplus_{j=1}^n X_j$ と書く．また，$j = 1,\ldots,n$ に対して $u_j \colon X_j \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ を**第** j–**移入**という．また，$j = 1,\ldots,n$ について，**第** j–**射影**と呼ばれる射 $p_j \colon X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to X_j$ も存在し，任意の $i \neq j$ と $u_1 \circ p_1 + \cdots + u_n \circ p_n = 1_{X_1 \oplus \cdots \oplus X_n}$ について，$p_j \circ u_j = 1_{X_j}$，$p_j \circ u_i = 0$ となる．これは射の集合 $g_1 \colon X \to X_1,\ldots,g_m \colon X \to X_n$ を与えると，任意の $j = 1,\ldots,n$ について $p_j \circ g = g_j$ となるような一意な射 $g \colon X \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ が存在する．

圏 C が**加法圏** (additive category) とは次の条件を満たすものである．

- 任意の C の対象 $X_1,\ldots,X_n$ に対して，C に直和 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ が存在する．
- C の各対象の組 X と Y について X から Y へのすべての射の集合 $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ が加法群の構造を持つ．
- C の各対象の三つ組 X，Y，Z について射の合成が**双線型** (bilinear)，すなわち，任意の射 $f,f' \in \mathrm{Hom}_C(Y,Z)$，$g,g' \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ について，

  $$(f+f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$$
  $$f \circ (g+g') = f \circ g + f \circ g'$$

  を満たす．
- C の**零対象** (zero object) と呼ばれる対象 0 が存在して，恒等射 1_0 が加法群 $\mathrm{Hom}_C(0,0)$ の零元に対応する．この零対象は同型を除いて一意である．

任意の圏 A に対して，対象が A と同じで射の向きが A と反対になっている圏を**反対圏** (opposite category) または**双対圏** (dual category) と呼び，A^{op} で表す．すなわち，A の

すべての対象 X，Y に対し，$\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_A(Y,X)$ となり，A^{op} の合成を $\circ'$ とすれば A の射 f，g に対して $g\circ' f=f\circ g$ となる．また，明らかに $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=A$ である．

K を体とする．圏 C が**線形圏** (K-linear category) とは，C の各対象のペア X，Y について，集合 $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ が K 上ベクトル空間の構造を備えて，C の射の合成 $\circ$ が双線型であるときをいう．

圏 C を加法圏とし，$f\colon X\to Y$ を圏 C の射とする．f の**核** (kernel) は対象 $\mathrm{Ker}(f)$ と射 $u\colon \mathrm{Ker}(f)\to X$ の組であり，次の条件を満たす．

- $f\circ u=0$ となる．
- 任意の C の対象 Z と $f\circ h=0$ を満たす任意の射 $h\colon Z\to X$ に対して，$h=u\circ h'$ を満たすような一意な射 $h'\colon Z\to \mathrm{Ker}(f)$ が存在する．

また，f の**余核** (cokernel) は対象 $\mathrm{Coker}(f)$ と射 $p\colon Y\to \mathrm{Coker}(f)$ の組であり，次の条件を満たす．

- $p\circ f=0$ となる．
- 任意の C の対象 Z と $k\circ f=0$ を満たす任意の射 $k\colon Y\to Z$ に対して，$k=k'\circ p$ を満たすような一意な射 $k'\colon \mathrm{Coker}(f)\to Z$ が存在する．

圏 C のすべての射が核と余核を持つと仮定すると，各 C の射 $f\colon X\to Y$ について，次の図式を可換にするような C の一意な射 $\overline{f}$ を構成することができる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker}(f) \\
 & \mathrm{Coker}(u) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Ker}(p) \arrow[u, "u'"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで，$p\circ f=0$ より $f=u'\circ f'$ を満たすような一意な射 $f'\colon X\to \mathrm{Ker}(p)$ が存在する．さらに，$u'\circ f'\circ u=f\circ u=0$ より u' は単射で，$f'\circ u=0$ となる．したがって，余核の定義より $f'=\overline{f}\circ p'$ を満たすような一意な射 $\overline{f}\colon \mathrm{Coker}(u)\to \mathrm{Ker}(p)$ が存在する．なお，対象 $\mathrm{Ker}(p)$ のことを f の**像** (image) と呼び，$\mathrm{Im}(f)$ と表す．

圏 C が**アーベル圏** (abelian category) とは次を満たすものを言う．

- 圏 C は加法圏である．
- C の各射 $f\colon X\to Y$ が，f の核 $u\colon \mathrm{Kef}(f)\to X$ と余核 $p\colon Y\to \mathrm{Coker}(f)$ を持ち，誘導される射 $\overline{f}\colon \mathrm{Coker}(u)\to \mathrm{Ker}(p)$ が同型である．

右 A 加群全体とそれらの間の準同型全体のなす圏を $\mathrm{Mod}(A)$ と書き，これを A の（右）

加群圏という．また，$\mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ を A の左加群圏と呼び A-Mod で表す．また，有限生成 A 加群全体からなる $\mathrm{Mod}(A)$ の充満部分圏を $\mathrm{mod}(A)$ と書く．また，体 K 上の加群がベクトル空間であることを思い出せば，ベクトル空間全体とそれらの間の線形写像の全体のなす圏を $\mathrm{Mod}(K)$ と表すことができる．このとき，有限次元ベクトル空間全体からなる $\mathrm{Mod}(K)$ の充満部分圏は $\mathrm{mod}(K)$ と書く．これらは特にアーベル圏かつ線型圏である．

$F\colon A \to B$ が圏 A から圏 C への**関手** (functor) とは次を満たすときをいう．

- A の対象 X を B の対象 $F(X)$ に対応させる．
- A の任意の対象のペア X と Y に対して，A における射 $f\colon X \to Y$ を B における射 $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ に対応させる．また，A の各対象 X に対して $F(1_X) = 1_{F(X)}$ を満たし，任意の A の射 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ に対して，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ となる．

圏 A^{op} から圏 B への関手のことを圏 A から圏 B への**反変関手** (contravarian functor) と呼び，通常の関手はこれと区別して**共変関手** (covariant functor) と呼ぶ．関手が反変関手のときは，A の射 $f\colon X \to Y$ について $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$ となることに注意する．また，$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ となる．共変（反変）関手の合成は再び共変（反変）関手となることが容易にわかる．

関手 $F\colon A \to B$ は A の対象のすべてのペア X，Y に対して，$F\colon \mathrm{Hom}_A(X,Y) \to \mathrm{Hom}_B(F(X),F(Y))$ が単射になるとき，**忠実** (faithful) であるといい，全射のときは**充満** (full) であると言う．また，全単射なら**充満忠実** (full and faithful) と言う．また，圏 B のすべての対象 Z に対して A の対象 X が存在して $F(X) \cong Z$ が同型となるとき，関手 F は**密** (dense) であるという．

$F\colon A \to B$ を加法圏 A から加法圏 B への関手とする．F が**直和を保存する** (preserves direct sums) とは，任意の $X_1, X_2 \in \mathrm{Obj}(C)$ に対して，直和への移入 $X_1 \xrightarrow{u_1} X_1 \oplus X_2 \xleftarrow{u_2} X_2$ によって誘導される射 $F(X_1) \xrightarrow{F(u_1)} F(X_1 \oplus X_2) \xleftarrow{F(u_2)} F(X_2)$ が同型 $F(X_1) \oplus F(X_2) \cong F(X_1 \oplus X_2)$ となるときを言う．

関手 $F\colon A \to B$ が**加法的** (additive) であるとは，F が直和を保存し，任意の対象 $X, Y \in \mathrm{Obj}(A)$ に対して，写像

$$F_{XY}\colon \mathrm{Hom}_A(X,Y) \to \mathrm{Hom}_B(F(X),F(Y)); \quad h \mapsto F(h)$$

が，任意の射 $f, g \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ について，$F(f+g) = F(f) + F(g)$ となるときを言う．また，A と B を線形圏とするとき，関手 $F\colon A \to B$ が K **線形** (K-linear) とは，F が加法的かつ圏 A のすべての対象 X と Y に対して F_{XY} が K 線形写像であるときをいう．

$F, F'\colon A \to B$ を圏 A から圏 B への関手とする．任意の圏 A の射 $f\colon X \to Y$ について, 圏 B で次の図式を可換にするような射 $\alpha_X\colon F(X) \to F'(X)$ の族 $\alpha := (\alpha_X)_{X \in Obj(A)}$ を F から F' への**自然変換** (natural transformation) とよび，$\alpha\colon F \Rightarrow F'$ で表す．

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y & & \end{array} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(X) \arrow[d, "F(f')"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & F'(Y) \end{tikzcd}$$

ここで，すべての $\alpha_X\colon F(X) \to F(X')$ が同型射であるとき，α を**自然同型** (natural equivalence) と呼ぶ．自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, 記号で $F \cong G$ と表す．また，自然変換同士の合成を**垂直合成** (vertical composition) と呼び, これも再び自然変換となる．

関手 $F\colon A \to B$ を圏 A から圏 B への関手とする．このとき，関手 $G\colon B \to A$ が存在して，$GF = 1_A$ かつ $FG = 1_B$ が成り立つとき，F は**同型**であるという．このとき，関手 G を F の**逆** (inverse) という．また，$GF \cong 1_A$ かつ $FG \cong 1_B$ であるとき，F は**同値**であるといい，このとき，関手 G は F の**擬逆** (quasi-inverse) という．関手 F が同値であるとき，圏 A と圏 B は**圏同値**であるといい，$A \cong B$ と表す．

K 代数 A 上の加群 M_i，$(i = 1, 2, \ldots, n)$ と A 加群準同型の列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

が与えられたとき，これを長さ n の系列という．この系列が M_i において**完全** (exact) であるとは,

$$\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$$

が成立するときをいう．系列のいたるところで完全であるものを特に**完全系列** (exact sequence) といったり，この系列が完全であると言ったりする．定義より次が成り立つ．

命題 2.59. 完全系列について，(1)，(2) が成り立つ．

(1) $0 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ g は単射である．
(2) $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} 0$ が完全 $\iff$ f は全射である．

定義 2.60. A 加群の系列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が完全であるとき，これを**短完全列** (short exact sequence) という．また，このとき，M を L による N の**拡大**と呼ぶ．

前の命題から，短完全列が得られたとき，f が単射で g が全射である．また f が単射であることを考えれば，$\mathrm{Im}(f) \cong L$ である．準同型定理より，

$$N = \mathrm{Im}(g) \cong M/\mathrm{Ker}(g) = M/\mathrm{Im}(f) \cong M/L$$

となる．よって，M が L によって商空間に分解されており，その各類が N の空間に対応していることがわかる．これを線型空間で考えれば，

$$\begin{aligned} \dim M &= \dim \mathrm{Ker}(g) + \dim \mathrm{Im}(g) \\ &= \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g) \\ &= \dim L + \dim N \end{aligned}$$

となる．したがって，M は L と N によって分解されており，M の基底は L と N の基底によって定まるということである．したがって，改めて短完全列を記しておくと，

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/L \to 0$$

となる．

補足 3. A と B をアーベル圏とする．加法的共変関手 $F\colon A \to B$ が**左完全** (left exact)(または**右完全** (right exact)) とは $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$（または $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$）が完全列であるならば，

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$
$$(F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0)$$

が完全列であるときを言う．また，$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が完全列であるとき，関手 F によって $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} Z$ が完全列になるとき，F は**完全** (exact) であるという．また，加法的反変関手 $G\colon A \to B$ が**左完全** (left exact)(または**右完全** (right exact)) とは $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$（または $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$）が完全列であるならば，

$$0 \to G(Z) \xrightarrow{G(g)} G(Y) \xrightarrow{G(f)} G(X)$$
$$(G(Z) \xrightarrow{G(g)} G(Y) \xrightarrow{G(f)} G(X) \to 0)$$

が完全列であるときを言う．また，$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が完全列であるとき，関手 G によって，$G(Z) \xrightarrow{G(g)} G(Y) \xrightarrow{F(f)} G(X)$ が完全列になるとき，G は**完全** (exact) であるという．また，短完全列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ に対しても同様に，関手 F によって

$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} Z \to 0$ が再び短完全列になるなら，F は完全であり，関手 G によって，$0 \to G(Z) \xrightarrow{G(g)} G(Y) \xrightarrow{G(f)} G(X) \to 0$ が再び短完全列になるなら，G は完全であるという．また，明らかに左完全かつ右完全であるなら完全になる．

定義 2.61. A 加群 L，M について，準同型 $f\colon L \to M$ に対し，準同型 $h\colon M \to L$ が存在して，$h \circ f = 1_L$ となるとき，f を**セクション** (section) と呼ぶ．

A 加群 M，N について，準同型 $g\colon M \to N$ に対し，準同型 $h\colon N \to M$ が存在して $g \circ h = 1_N$ となるとき，g を**レトラクション** (retraction) と呼ぶ．

A 加群の短完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

に対し，f がセクションまたは g がレトラクションになるとき，この短完全列は**分裂** (split) するという．短完全列が分裂するとき，特に $M \cong L \oplus N$ となる．このとき，f を**分裂単射**，g を**分裂全射**という．

定義 2.62. A を K 代数とする．このとき，右 A 加群 P が**射影加群** (projective module) とは，任意の右 A 加群 M，N について，全射準同型 $h\colon M \to N$ と準同型 $f\colon P \to N$ に対して，以下の図式を可換にするような準同型 $f'\colon P \to N$ が存在するときをいう．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

補題 2.63. A を K 代数とする．A 加群 L，M と，射影加群 P について，次の短完全列は分裂する．

$$0 \to L \to M \xrightarrow{g} P \to 0$$

証明. g がレトラクションであることを示せばよい．P が射影加群なので $h\colon P \to M$ なる準同型が存在して，$g \circ h = 1_P$ となる．よって，短完全列は分裂する． □

補題 2.64. A を K 代数とする．右 A 加群 P が射影加群であることと，$P \oplus P' \cong F$ を満たす自由 A 加群 F と右 A 加群 P' が存在することが同値である．

証明. 自由加群は射影加群でもある．A 加群 M，N に対して，$p\colon M \to N$ を全射準同型であるとし，自由加群 F について，準同型 $q\colon F \to N$ を考える．自由加群には基底が存在するので，この時 Λ を添え字集合として，F の基底 u_λ，$(\lambda \in \Lambda)$ を固定しておく．p が全射であるので，$p(x_\lambda) = q(u_\lambda)$ となるような M の元 x_λ が存在する．このとき，

$F \to M$ を $f(u_\lambda) = x_\lambda$ となるように定めれば，F は射影加群になる．逆に P が元 m_λ によって生成されている射影加群であると仮定する．さらに，自由加群 $F = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda A$ が自由基底 x_λ で生成されているとする．このとき，準同型 $f\colon F \to P$ を $f(x_\lambda) = m_\lambda$ として，全射準同型とすると，P が射影加群なので，f のセクション $s\colon P \to F$ が存在する．ゆえに $F \cong P \oplus \mathrm{Ker}(f)$ となる．$\square$

次の命題は有限次元代数上の有限次元射影加群の構造を記述する方法を与える．

命題 2.65. A を有限次元 K 代数とすると次が成り立つ．

(1) $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ として A_A が分解されるとすると，直既約右射影加群の直和になる．

(2) $\mathrm{mod}(A)$ におけるすべての非零な射影加群 P は $j = 1, \ldots, m$ で加群 P_j を直和因子として $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ となり，$i = 1, \ldots, n$ で加群 e_iA と同型になる．

証明. (1)：A_A は原始的直交冪等元 $e_1, \ldots, e_n$ を自由基底として自由加群となる．射影加群は自由加群の直和因子になるため，各 $e_1A, \ldots, e_nA$ は直既約右射影加群となる．

(2)：P を射影加群とし，P が直既約 A 部分加群の直和として $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ のように分解されているとする．P は射影加群なので，ある加群 P' が存在し $P \oplus P'$ となる．これは A_A^t, $(t \geq 1)$ と同型である．$P' = P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_r$ が直既約 A 部分加群の直和で分解されているとすると，

$$P_1 \oplus \cdots \oplus P_m \oplus P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_r \cong (e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA)^t$$

を得る．Krull–Schmidt の定理より，各加群 P_j, $(j = 1, \ldots, m)$ が e_iA, $(i = 1, \ldots, n)$ と同型になる．$\square$

定義 2.66. A を K 代数とする．このとき，右 A 加群 I が**移入加群** (injective module) とは，任意の A 加群 L, M について，単射準同型 $u\colon L \to M$ と準同型 $g\colon L \to I$ に対して，以下の図式を可換にするような準同型 $g'\colon M \to I$ が存在するときをいう．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

補題 2.67. A を K 代数とする．A 加群 M, N と，移入加群 I について，次の短完全列は分裂する．

$$0 \to I \xrightarrow{f} M \to N \to 0$$

証明. f がセクションであることを示せばよい．I が移入加群なので $h\colon M \to I$ なる準同型が存在して，$h \circ f = 1_I$ となる．よって，短完全列は分裂する． $\square$

補足 4. 二つの重要な関手として，圏 A の対象 X を任意に固定することによって得られる Hom 関手 $\mathrm{Hom}(X,-)$ と $\mathrm{Hom}(-,X)$ を紹介する．$\mathrm{Hom}(X,-)$ は圏 A から K 上ベクトル空間の圏に送る共変関手となる．すなわち A の対象 Y を，X から Y へのすべての射で構成されるベクトル空間 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ に送り，A の射 $f\colon Y \to Z$ を写像 $f_*\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)$ に送る．図としては

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

となり．すなわち，$f_*(g) = f \circ g$ となる．写像 f_* は f の**押し出し** (push forward) と呼ばれる．特に，$\mathrm{Hom}(X,-)$ は完全列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ を完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X,N)$$

に写すので左完全である．

$\mathrm{Hom}(-,X)$ は，上の関手の双対概念で，圏 A から K 上ベクトル空間の圏に送る反変関手となる．すなわち A の対象 Y を，Y から X へのすべての射で構成されるベクトル空間 $\mathrm{Hom}(Y,X)$ に送り，A の射 $f\colon Y \to Z$ を写像 $f^*\colon \mathrm{Hom}(Z,X) \to \mathrm{Hom}(Y,X)$ に送る．図としては

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

となり，すなわち，$f^*(g) = g \circ f$ となる．写像 f^* は f の**引き戻し** (pull back) と呼ばれる．特に，$\mathrm{Hom}(-,X)$ は完全列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ を完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(L,X)$$

に移すので左完全である．

Hom 関手を用いると射影加群と移入加群の定義が簡単になる．射影加群の定義から，$M \xrightarrow{h} N \to 0$ が完全なとき，$\mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}(P,N) \to 0$ が右完全となる．これは準同型 $f' \in \mathrm{Hom}(P,M)$ が存在することと同値となり，このとき $\mathrm{Hom}(P,-)$ は完全になる．したがって, P が射影加群であることと, $\mathrm{Hom}(P,-)$ が完全であることが同値となる．

また，移入加群の定義より，$0 \to L \xrightarrow{u} M$ が完全なとき，$\mathrm{Hom}(M, I) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(L, I) \to 0$ が右完全となる．これは準同型 $g' \in \mathrm{Hom}(M, I)$ が存在することと同値となり，このとき $\mathrm{Hom}(-, I)$ は完全になる．したがって，I が移入加群であることと，$\mathrm{Hom}(-, I)$ が完全であることが同値となる．

定義 2.68. A を K 代数とする．A 加群 M の部分加群 L が**余剰** (superfluous) とは，M のすべての部分加群 X に対して $L + X = M$ となるならば $X = M$ であるときをいう．また，全射準同型 $h\colon M \to N$ の核 $\mathrm{Kef}(h)$ が M の余剰部分加群であるとき，h を**極小** (minimal) ないしは**余剰全射** (superfluous epimorphism) という．

定義 2.69. A を K 代数とする．A 加群 M の部分加群 N が**本質** (essential) とは，M のすべての部分加群 X に対して $X \cap N = 0$ となるならば $X = 0$ であるときをいう．また，単射準同型 $u\colon M \to N$ の像 $\mathrm{Im}(u)$ の非零な共通部分を N のすべての非零な部分加群 X が持つとき，u を**極小**ないしは**本質単射**という．

注意 15. 明らかに 0 は M の余剰部分加群であり，また，M 自身は M の本質部分加群である

定義 2.70. 射影加群 P からの全射準同型 $h\colon P \to M$ が M の**射影被覆** (projective cover) であるとは，h が余剰全射であるときをいう．

定義 2.71. 移入加群 E への単射準同型 $u\colon M \to E$ が M の**移入包絡** (injective envelope) であるとは，u が本質単射であるときをいう．

定義 2.72. M を A 加群とする．

- M に対し，各加群 P_i が射影加群であるような次の完全列

$$\cdots P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

  を M の**射影分解** (projective resolution) という．また，$d_0\colon P_0 \to M$ が射影被覆であり，すべての $i > 0$ について $d_i\colon P_i \to \mathrm{Ker}(d_{i-1})$ が射影被覆となるとき**極小**であるという．
- M に対し，P_0 および P_1 が射影加群であるような次の完全列

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

  が極小であるとき，この完全列を M の**極小射影表示** (minimal projective presentation) という．

- M に対し，各加群 I_i が移入加群であるような次の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \to \cdots \to I_n \xrightarrow{d_{n+1}} I_{n+1} \to \cdots$$

  を M の**移入分解** (injective resolution) という．また，$d_0\colon M \to I_0$ が移入包絡であり，すべての $i > 0$ について $d_i\colon \mathrm{Coker}(d_{i-1}) \to I_i$ が移入包絡となるとき**極小**であるという．
- M に対し，I_0 および I_1 が移入加群であるような次の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1$$

  が極小であるとき，この完全列を M の**極小移入表示** (minimal injective presentation) という．

定理 2.73. A を有限次元 K 代数とする．A の原始的直交冪等元の完全系を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とし，右 A 加群 $A_A = e_1A \oplus \cdots e_nA$ であるとする．次が成り立つ．

(1) 任意の A 加群 M について射影被覆

$$P(M) \xrightarrow{h} M \to 0$$

が存在する．ここで，$s_1, \ldots, s_n \geq 0$ で，$P(M) \cong (e_1A)^{s_1} \oplus \cdots \oplus (e_nA)^{s_n}$ であるとする．準同型 h が同型 $P(M)/\mathrm{rad}(P(M)) \cong M/\mathrm{rad}(M)$ を誘導する．

(2) A 加群 M の射影被覆 $P(M)$ は存在すれば一意である．

証明. (1):$B = A/\mathrm{rad}(A)$ として，$\overline{e}_j = e_j + \mathrm{rad}(A) \in B$ とする．また，$p\colon A \to B$ を自然な全射とする．$\{e_1, \ldots, e_n\}$ が A の原始的直交冪等元の完全系であるので，$\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$ が B の原始的直交冪等元の完全系になり，$B_B = \overline{e_1}B \oplus \cdots \oplus \overline{e_n}B$ が直既約分解されている．したがって，$\mathrm{rad}(e_jA) \subseteq e_jA$ が e_jA の一意な極大部分 A 加群となり，$\mathrm{top}(e_jA) \cong \overline{e_j}B$ が単純 B 加群となる．また，p によって誘導された全射準同型 $p_j\colon e_jA \to \mathrm{top}(e_j)A$ が $\mathrm{top}(e_jA)$ の射影被覆となる．

M を A 加群とすると $\mathrm{top}(M) = M/\mathrm{rad}(M)$ が B 加群になり，各 $s_1, \ldots, s_n \geq 0$ について，B 加群の同型

$$\mathrm{top}(M) \cong (\overline{e_1}B)^{s_1} \oplus \cdots \oplus (\overline{e_n}B)^{s_n} \cong (\mathrm{top}(e_1A))^{s_1} \oplus \cdots \oplus (\mathrm{top}(e_nA))^{s_n}$$

が存在する．ここで，$P(M) = (e_1A)^{s_1} \oplus \cdots \oplus (e_nA)^{s_n}$ とする．$P(M)$ は射影性より，

A 加群準同型 $h\colon P(M) \to M$ が存在し，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"] & M \arrow[d, "t'"] \\ \mathrm{top}(P(M)) \arrow[r, "\mathrm{top}(h)"] & \mathrm{top}(M) \end{tikzcd}$$

ここで，t と t' はそれぞれ自然な全射である．また，h が全射であることから $\mathrm{top}(h)$ も全射になり，さらに同型になる．さらに可換性から，

$$\mathrm{Ker}(h) \subseteq \mathrm{Ker}(t) = (\mathrm{rad}(e_1A))^{s_1} \oplus \cdots \oplus (\mathrm{rad}(e_nA))^{s_n} = \mathrm{rad}(P(M))$$

となる．したがって，加群 $\mathrm{rad}(P(M))$ が $P(M)$ の余剰部分加群になり，$\mathrm{Ker}(h)$ もまた $P(M)$ の余剰部分加群になる．ゆえに，全射準同型 h は M の射影被覆となる．

(2)：射影加群 P' で $h'\colon P' \to M$ が射影被覆であるとする．P' の射影性から $g\colon P' \to P(M)$ が存在して，$h \circ g = h'$ となり，これは全射になる．したがって，$\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(h) = P(M)$ となり，$P(M)$ で $\mathrm{Ker}(h)$ が余剰部分加群なので，$\mathrm{Im}(g) = P(M)$ より g が全射になる．P と $P(M)$ を置き換えて考えても成り立つので，g が同型写像になる． □

系 2.74. A を有限次元 K 代数とする．A 加群 P が射影加群とすると，自然な全射 $t\colon P \to \mathrm{top}(P)$ が $\mathrm{top}(P)$ の射影被覆になっている．また，このときある $s_1, \ldots, s_n \geq 0$ について A 加群の同型 $P \cong (e_1A)^{s_1} \oplus \cdots \oplus (e_nA)^{s_n}$ が存在する．

系 2.75. A を有限次元 K 代数とする．任意の A 加群 M は極小射影表示と，極小射影分解を持つ．

証明. 前の定理より，A 加群 M に射影被覆 $p_0\colon P_0 \to M$ が存在する．すると，$\mathrm{Ker}(p_0)$ が有限次元になり，さらに射影被覆 $p_1\colon P_0 \to \mathrm{Ker}(p_0)$ が存在する．これは M の極小射影表示を姿勢する．これを続けることによって，極小射影分解の存在も得られる． □

補足 5. A を K 代数とする．A 加群の圏における双対について補足しておく．A 加群において，すべての左 A 加群と右 A^{op} 加群を同一視することができる．すなわち圏としては A–Mod と $\mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ が同一視できるということである．A–mod も同様に成立する．

これに関連して，有限次元 K 代数 A の加群圏 $\mathrm{mod}(A)$ と $\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ について，加群圏の**標準双対** (standard duality) というものがある．これは $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ で与えられる反変関手である．このとき，この関手で自然同型 $1_{\mathrm{mod}(A)} \cong D \circ D$ および

$1_{\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})\cong D\circ D}$ が得られる．すなわち圏と関手の対応としては，

$$\mathrm{mod}(A) \underset{D}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$$

のようになり，関手 D 自身が D の擬逆になっている．

具体的に $\mathrm{mod}(A)$ の対象 M を関手 D に適用すると，この関手は対象 M を K 上ベクトル空間 $D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ に割り当てる．これは $a \in A$，$m \in M$，$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, K)$ について，$\varphi(ma) = (a\varphi)(m)$ によって左 A 加群の構造を持ち，$\mathrm{mod}(A)$ の各射 $f\colon M \to N$ については，任意の $\psi \in D(N) = \mathrm{Hom}_K(N, K)$ に対して $D(f)(\psi) = \psi \circ f$ を満たすような左 A 加群の射 $D(f)\colon D(N) \to D(M)$ に対応させる．

擬逆 $D\colon \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{mod}(A)$ については，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ の対象 X を関手 D に適用すると，この関手は対象 X を K 上ベクトル空間 $D(X) = \mathrm{Hom}_K(X, K)$ に割り当てる．これは $a \in A$，$x \in X$，$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, K)$ について，$\varphi(ax) = (\varphi a)(x)$ によって右 A 加群の構造を持ち．$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ の各射 $g\colon X \to Y$ については，任意の $\psi \in D(Y) = \mathrm{Hom}_K(Y, K)$ に対して $D(g)(\psi) = \psi \circ g$ を満たすような右 A 加群の射 $D(g)\colon D(Y) \to D(X)$ に対応させる．

すると，有限次元 K 上ベクトル空間に対して，同型射 $e_V\colon V \to DD(V) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$ を $x \in V$ および $f \in D(V)$ について，$e_V(x)(f) = f(x)$ で定めることにより，関手 $1_{\mathrm{mod}(A)} \cong D \circ D$ および $1_{\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})} \cong D \circ D$ で自然同型が定義できる．

標準双対 $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ を用いると，単純加群，射影加群，移入加群の間に便利な性質が導ける．双対で対応関係を与えているだけなので，証明は省略する．

定理 2.76. A を有限次元 K 代数とし，$D\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ を標準双対 $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ とすると，次が成り立つ．

(1) $L, N, M \in \mathrm{mod}(A)$ について，系列 $0 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{h} N \to 0$ が完全列であることと，$\mathrm{mod}(A^{op})$ 上で誘導される系列 $0 \to D(N) \xrightarrow{D(h)} D(M) \xrightarrow{D(u)} D(L) \to 0$ が完全列であることが同値となる．

(2) $E \in \mathrm{mod}(A)$ が移入加群であることと，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ 上で $D(E)$ が射影加群になることが同値となり，$P \in \mathrm{mod}(A)$ が射影加群であることと，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ 上で $D(P)$ が移入加群になることが同値となる．

(3) $S \in \mathrm{mod}(A)$ が単純加群であることと，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ 上で $D(S)$ が単純加群になることが同値となる．

(4) $\mathrm{mod}(A)$ 上の単射準同型 $u\colon M \to E$ が移入包絡であることと，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ 上で全射準同型 $D(u)\colon D(E) \to D(M)$ が射影被覆になることが同値となる．同様に $\mathrm{mod}(A)$ 上の全射準同型 $h\colon P \to M$ が射影被覆であることと，$\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ 上で単射準同型 $D(h)\colon D(M) \to D(P)$ が射影被覆になることが同値となる．

証明. 定義から簡単に従う． $\square$

系 2.77. 任意の A 加群 M について，M は移入包絡 $u\colon M \to E(M)$ を持ち，A 加群 (M) は同型を除いて M によって一意に決定する．

証明. M を右 A 加群とする．左 A 加群 $D(M)$ は射影被覆 $h\colon P \to D(M)$ を持つので，$\mathrm{mod}(A)$ における単射準同型 $M \cong DD(M) \xrightarrow{D(h)} D(P)$ が M の移入包絡になる．したがって，$E(M) = D(P)$ とすればよい．また，左 A 加群 P は同型を除き，$D(M)$ によって一意に決定されるので，右 A 加群 $E(M) = D(P)$ も同型を除き，M によって一意に決定する． $\square$

系 2.78. 任意の A 加群 M は極小移入表示と，極小移入分解を持つ．

証明. M を右 A 加群とする．左 A 加群 $D(M)$ は極小射影表示と極小射影分解を持つので，標準双対 $D\colon \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{mod}(A)$ によって，$M \cong DD(M)$ には極小移入表示と極小移入分解がそれぞれ存在する． $\square$

ここで，拡大群について簡単に紹介しておく．系 2.75 によって，A 加群 M には極小射影分解

$$\cdots P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

が存在することが分かった．この完全列に関手 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ を適用すると**複体** (complex) と呼ばれる系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{d_0^*} \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_A(P_n,N) \to \cdots$$

が得られる．これは任意の i について，$d_i^* d_{i-1}^* = 0$ を満たす系列のことである．すなわち $\mathrm{Im}(d_{i-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$ となる．

なお，単に複体を考えるだけなら任意の i で $d_i d_{i-1} = 0$ を満たすような A 加群の系列

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i+1} \to \cdots$$

を考えればよい．このときこの複体を記号で $M_\bullet = (M_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ と書くことが多い．ここで，任意の i で $H^i(M_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i-1})$ をこの複体の i 次**コホモロジー群**

(cohomology group) という．定義から複体が完全列であるときは任意のコホモロジー群は 0 になる．またこれは $\mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(d_{i-1}) \to \mathrm{Ker}(d_i))$ と同一視できる．

再び $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ で得られた複体に話を戻そう．M の射影分解に $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ を適用して得られた複体について, $i \geq 1$ での i コホモロジー群のことを i 次**拡大群** (Extension group) という．これを記号で $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ と書く．すなわち,

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,N) = \mathrm{Ker}(d^*_{i+1})/\mathrm{Im}(d^*_i)$$

で定義する．なお，今後の理論において興味がある対象は，M の極小射影表示

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \to 0$$

である．これに $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ を適用して複体を構成し，拡大群 $\mathrm{Coker}(f*) = \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ を加えると次の完全列を得ることができる．

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \to \mathrm{Coker}(f^*) \to 0$$

なお,

$$\begin{aligned}\mathrm{Coker}(f^*) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(P_1,N) \to 0)/\mathrm{Im}(f^*) \\ &= \mathrm{Hom}_A(P_1,N)/\mathrm{Im}(f^*)\end{aligned}$$

である．

なお, A 加群 M と N に対して, 短完全列 $0 \to N \to E \to M \to 0$ における E を N による M の拡大と言った．このとき, M と N を固定して, 別な拡大 $0 \to N \to E' \to M \to 0$ を考えると次の図式が可換になり，$E \cong E'$ となる．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{=} & & \downarrow{\cong} & & \downarrow{=} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

例えば $E = M \oplus N$ ならばこの短完全列は分裂する．これを自明な拡大といい，これと同型な拡大はすべて分裂し，このような拡大を集めた同値類が得られる．詳細は省くが N による M のすべての拡大の集合を $\mathcal{E}_A(M,N)$ として，これの各同値類の集合を $\mathcal{E}^1_A(M,N) = \mathcal{E}_A(M,N)/\cong$ で定める．これに加法を適切に定めることによって $\mathcal{E}^1_A(M,N)$ はアーベル群の構造を持つ．なお，$\mathcal{E}^1_A(M,N)$ における零元は分裂する拡大の同値類となる．このアーベル群 $\mathcal{E}^1_A(M,N)$ と $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ が同型となる．詳しくは [ASS06] を参照して欲しい．

この章の最後に有限次元代数上の加群について重要な性質を紹介する．下記の系から有限次元代数上の加群における単純加群，移入加群および射影加群を同型を除いて分類分けすることができる．

系 2.79. A を有限次元 K 代数とし，右 A 加群 A_A が直既約部分加群によって，$A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ と分解されているとすると次が成り立つ．

(1) すべての単純右 A 加群は次の加群の一つと同型になる．

$$S(1) = \mathrm{top}(e_1A), \ldots, S(n) = \mathrm{top}(e_nA)$$

(2) すべての直既約射影右 A 加群は次の加群の一つと同型になる．

$$P(1) = e_1A, P(2) = e_2A, \ldots, P(n) = e_nA$$

さらに，$e_iA \cong e_jA$ となることと $S(i) \cong S(j)$ となることが同値となる．

(3) すべての直既約移入右 A 加群は次の加群の一つと同型になる．

$$I(1) = D(Ae_1) \cong E(S(1)), \ldots, I(n) = D(Ae_n) \cong E(S(n))$$

ここで，$E(S(j)$ は単純加群 $S(j)$ の移入包絡である．

証明. 系 2.57, 2.74，および定理 2.49，2.76 から従う． □

3 箙と表現

この章では箙と呼ばれるものを導入する．箙はある K 代数に対応させることができ，代数をより分かりやすく視覚的に表すことが可能となる．さらに，この箙についても K 代数の時と同様に表現というものを考え，この表現が代数上の加群（すなわち表現）と対応することを概説する．

3.1 箙と道代数

定義 3.1. 二つの集合 Q_0 と Q_1 および，二つの写像 $s, t\colon Q_1 \to Q_0$ の四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を**箙** (quiver) という．Q_0 の元を**頂点** (vertex)，Q_1 の元を**矢印** (arrow) という．また，任意の矢印 $\alpha \in Q_1$ に対して，$s(\alpha) \in Q_0$ を**始点** (source)，$t(\alpha) \in Q_0$ を**終点** (target) という．

矢印 $\alpha \in Q_1$ について，$s(\alpha) = a$ および $t(\alpha) = b$ とすると，

$$a \xrightarrow{\quad \alpha \quad} b$$

と図示することができる．またしばしば s, t を省略して箙 Q を $Q = (Q_0, Q_1)$ と書くこともある．また，Q_0, Q_1 が有限集合のとき，Q を**有限** (finite) という．

定義 3.2. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を箙とする．$a, b \in Q_0$ について，c が始点 a から終点 b への長さ $l \geq 1$ の**道** (path) とは，Q_1 の元 α_i $(i = 1, \ldots, l)$ の列 $c = (a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$ であって，$s(\alpha_1) = a, t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}), t(\alpha_l) = b$ を満たすものである．道はしばしば単純に $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ と表す．

$a \in Q_0$ の長さ 0 の道を**自明な道** (trivial path)，$\varepsilon_a = (a||a)$ で表す．また，長さ $l \geq 1$ の道は始点と終点が一致するとき，**サイクル** (cycle) と呼ばれる．長さ 1 のサイクルのことを**ループ** (loop) という．箙 Q にサイクルがないとき，**非巡回** (acyclic) な箙という．$\alpha \in Q_1$ について矢印の向きを変えたものを α^{-1} と書くことにする．$a, b \in Q_0, m_j \in \{1, -1\}$ に対して長さ $l \geq 1$ の道 $(a|\alpha_1^{m_1}, \ldots, \alpha_l^{m_l}|b)$ が，$s(\alpha_1^{m_1}) = a, t(\alpha_i^{m_i}) = s(\alpha_{i+1}^{m_{i+1}}), t(\alpha_n^{m_n}) = b$ が成り立つときこれを**歩道** (walk) という．任意の頂点 $a, b \in Q_0$ に対して a から b への歩道が存在するとき Q が**連結** (connected) であるという．

この道という概念を使うことによって，箙が与えられたときに，次に定義する道代数という K 代数を構成することができる．

定義 3.3. K を体, $Q = (Q_0, Q_1)$ を箙とする．KQ が Q の K 上の**道代数** (path algebra) とは，以下で構成される K 代数である．

- KQ は Q の長さ 0 以上のすべての道を基底とする K 上ベクトル空間である．
- 任意の基底ベクトル $(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l|b), (c|\beta_1, \ldots, \beta_k|d)$ に対して積を

$$(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \ldots, \beta_k|b) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_k|b)$$

　で定め，K 上線型に拡張する．ここで δ_{bc} はクロネッカーのデルタである．

定義より，二つの道 $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ と $\beta_1 \cdots \beta_k$ は $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ のときゼロになり，$t(\alpha_l) = s(\beta_1)$ のとき合成された道 $\alpha_1 \cdots \alpha_l\beta_1 \cdots \beta_k$ となる．

箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ に対して長さ 0 の道と 1 の道はそれぞれ Q_0 の元と Q_1 の元に対して全単射な対応を持つ．ここで，Q_l を長さが $l \geq 0$ の Q すべての道の集合と考えると，

KQ_l は Q_l で生成される KQ の部分空間になっており，KQ はベクトル空間として次の直和に分解できる．

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \cdots \oplus KQ_l \oplus \cdots$$

補足 6. 道代数 KQ は $i \in \mathbb{N}_0$ の添え字で，$KQ = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} KQ_i$ とも書け，また，任意の $l, m \geq 0$ について，長さ l の道と長さ m の道の積はゼロか $l+m$ のいずれかになるので，$(KQ_l)(KQ_m) \subseteq KQ_{l+m}$ となる．したがって，KQ は次数つき代数である．

補題 3.4. Q を有限な箙，K を体とすると次が成り立つ．

(1) KQ は単位元を $1_{KQ} = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ とする K 代数である．
(2) KQ が有限次元であることと Q が非巡回な箙であることが同値である．

証明. (1) Q が有限な箙より，$a \in Q_0$ について，自明な道 $\varepsilon_a = (a||a)$ の和 $\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ は KQ の元になる．すると，$s(\alpha_1) = b$ から $t(\alpha_l) = c$ への Q の道 $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ について，次を得る．

$$\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a\right)(\alpha_1 \cdots \alpha_l) = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \alpha_1 \cdots \alpha_l = \varepsilon_b \alpha_1 \cdots \alpha_l = \alpha_1 \cdots \alpha_l$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_l)\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a\right) = \sum_{a \in Q_0} \alpha_1 \cdots \alpha_l \varepsilon_a = \alpha_1 \cdots \alpha_l \varepsilon_c = \alpha_1 \cdots \alpha_l$$

以上より，$\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ が KQ の単位元 1_{KQ} なる．

(2) $w = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ が Q でサイクルであるとする．すると，$r \geq 1$ について基底ベクトル $w^r = (\alpha_1 \cdots \alpha_l)^r$ をとることができるので，KQ が無限次元になる．ゆえに KQ が有限次元なら箙 Q は非巡回である．逆に，Q が非巡回な箙なら Q は有限な箙でもあるので，Q は有限な多くの道を含む．すると KQ は有限次元である． □

例 10. 箙は単なる有向グラフである．基本的な箙の例として，n 個の頂点が同じ方向の矢印によって一方向に向きつけられているようなものがある．このとき，各頂点に $\{1, 2, \cdots n\}$ なる集合の要素をそれぞれ対応させると，この集合が箙 Q の頂点集合 Q_0 になり，

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

のように図示することができる．ここで，$n = 3$ として，次の箙を考える．

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

この箙の矢印集合は $Q_1 := \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ となる．この箙の道代数はこの矢印集合 Q_1 を基底として構成される．例えば，道 $\alpha = (1 \mid \alpha \mid 2)$ と $\beta = (2 \mid \beta \mid 3)$ の道の合成は

$$\alpha\beta = (1 \mid \alpha \mid 2)(2 \mid \beta \mid 3) = (1 \mid \alpha\beta \mid 3)$$

として計算される．さらに定義より，$(2 \mid \beta \mid 3)(1 \mid \alpha \mid 2) = 0$ である．なお，この箙は n 次の三角行列環に代数として対応する．この各頂点の数字を行と列として有向グラフの隣接行列を考えよ．

補題より，cycle を持った箙に対する道代数は有限次元でないが，その道代数の両側イデアルで割ることにより有限次元 K 代数を構成することが可能になる．

定義 3.5. Q を有限な箙，K を体とする．すると道代数 KQ の K 部分空間

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_l \oplus \cdots$$

は両側イデアルになる．このイデアルを KQ の**矢印イデアル** (arrow ideal) という．

また，各 $l \geq 1$ について

$$R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} KQ_m = KQ_l \oplus KQ_{l+1} \oplus \cdots \oplus KQ_m \oplus \cdots$$

となるので，R_Q^l は長さ l 以上の Q のすべての道によって生成された KQ のイデアルになる．このとき，$m \geq 2$ で，

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$$

となるとき，KQ の両側イデアル I を**許容イデアル** (admissible ideal) という．KQ の許容イデアル I が存在するとき，箙 Q との組 (Q, I) を**有界箙** (bound quiver) といい，剰余代数 KQ/I を有界箙 (Q, I) の**有界箙代数** (bound quiver algebra) という．

注意 16. R_Q^l はイデアルの積なので，すべての元 $a \in R_Q$ 同士を積演算した結果の有限個の和である．

Q を有限で連結かつ非巡回な箙とする．R を KQ の矢印イデアル，$\epsilon_a = (a \mid\mid a)$ を頂点 $a \in Q_0$ の自明な道としたとき，集合 $\{\epsilon_a \mid a \in Q_0\}$ が道代数 KQ の原始的直交冪等元の完全系になる．さらに矢印イデアル R での商を考えれば，集合 $\{\overline{\epsilon_a} = \epsilon_a + R \mid a \in Q_0\}$ が KQ/R における原始的直交冪等元の完全系になる．また，KQ の許容イデアルを I とすると，集合 $\{e_a = \epsilon_a + I \mid a \in Q_0\}$ が有界箙代数 KQ/I の原始的直交冪等元の完全系になる．

命題 3.6. Q を有限な箙，K を体とし，I を道代数 KQ の許容イデアルとすると有界箙代数 KQ/I は有限次元 K 代数になる．

証明. KQ は長さ 0 以上すべての道を基底にしたベクトル空間なので, 長さが m より小さい道全体が基底となる KQ/R_Q^m は有限次元ベクトル空間になる．また，$R_Q^m \subseteq I \subseteq KQ$ より I/R_Q^m は KQ/R_Q^m の部分空間であり，$KQ/I \cong (KQ/R_Q^m)/(I/R_Q^m)$ であるしたがって，KQ/I は有限次元 K 代数になる． □

定義 3.7. Q を有限な箙，K を体とする．$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus 0$ で，共通の始点と終点を持つ長さ 2 以上の Q の道 $w_1, \ldots, w_n$ の K 線形結合

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

を道代数 KQ の**関係** (relation) という．

この定義において，$n = 1$ のときを**零関係** (zero relation) といい，二つの道 w_1 と w_2 で $w_1 - w_2$ の形をしているときこれを**可換関係** (commutativity relation) という．なお，有限な箙 Q の許容イデアル I は KQ の有限個の関係の集合で生成されていて，関係の集合を $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ とすれば，このとき，$I = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$ と書く．

例 11. 有界箙の例として，次の箙 Q を考える．

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

この箙 Q は代数としては，体 K 上の一変数多項式環 $K[t]$ に対応している．すなわち $KQ \cong K[t]$ であり，さらにこれは巡回な箙であることからもわかる通り，無限次元である．このとき，$m \geq 2$ で，矢印イデアル $I = \langle \alpha^m \rangle$ は許容イデアルとなる．したがって，$KQ/I \cong K[t]/\langle t^m \rangle$ は m 次元の代数となる．

3.2 箙の表現

定義 3.8. 箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ に対して，$M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ が次を満たすとき，M を Q の**表現** (representation) という．

(1) 頂点 $i \in Q_0$ に対して K 上ベクトル空間 M_i を対応させる．
(2) 矢印 $\alpha \in Q_1$ に対して，K 上の線形写像 $\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$ を対応させる．

Q の表現 $M=(M_i,\varphi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ を単に $M=(M_i,\varphi_\alpha)$ と書くこともある．

表現 $M=(M_i,\varphi_\alpha)$ について，各ベクトル空間 M_i が有限次元であるとき，表現 M が**有限次元**であるという．この時 M の**次元ベクトル** $\underline{\dim}(M)$ がベクトル空間 M_i の次元の組 $(\dim M_i)_{i\in Q_0}$ として与えられる．また，表現 M の要素は $m_i\in M_i$ について，それぞれの要素の組 $(m_i)_{i\in Q_0}$ として書く．

定義 3.9. 箙 $Q=(Q_0,Q_1)$ の二つの表現を $M=(M_i,\varphi_\alpha)$，$M'=(M'_i,\varphi'_\alpha)$ とする．このとき，$f\colon M\to M'$ が表現の間の**射** (morphism) であるとは，すべての $\alpha\colon i\to j$ について，以下の図を可換にするような線形写像の族 $f=(f_i)_{i\in Q_0}$ のことを言う．

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_i"'] & M_j \arrow[d, "f_j"] \\ M'_i \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_j \end{tikzcd}$$

すなわち，任意の $m_i\in M_i$ について $f_j\circ\varphi_\alpha(m)=\varphi'_\alpha\circ f_i(m)$ となる．また，各 f_i がすべて全単射であるとき射 f は**同型射** (isomorphism) と呼ばれる．M と同型なすべての表現の類を M の**同型類** (isoclass) という．

例 12. 箙 Q として，$1\to 2$ を考えてみる．これの表現としては，例えば以下のようなものがある．

$$M \quad K \xrightarrow{\quad 1 \quad} K$$

$$M' \quad K \xrightarrow{\quad 0 \quad} K$$

$$M'' \quad K \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

$$M''' \quad K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} K^3$$

このとき，次元ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} \underline{\dim}M &= \underline{\dim}M' = (1,1) \\ \underline{\dim}M'' &= (1,0) \\ \underline{\dim}M''' &= (2,3) \end{aligned}$$

となる．表現の間の射を考えてみると，例えば M から M'' の間の射は二つの写像の組 $f=(f_1,f_2)$ であり，次のように描くことができる．

$$
\begin{array}{ccc}
M & \qquad & \begin{tikzcd} K \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f_1"'] & K \arrow[d, "f_2"] \\ K \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd} \\
\downarrow f & & \\
M'' & &
\end{array}
$$

これらが可換になるためには，$f_2\circ 1=0\circ f_1=0$ より，$f_2=0$ であり，f_1 は 1 次元ベクトル空間から 1 次元ベクトル空間の射なので，任意の元 $a\in K$ での積として考えればよい．したがって，$f=(a,0)$ と書くことができる．

例 13. 次の箙を再び考える．

$$Q=\ 1 \circlearrowleft \alpha$$

この箙の表現を考えれば，単に線形変換であることがわかる．これに対応する代数上の加群の分解はジョルダン標準形に対応しており，よく研究されている．

補足 7. $M,\ M'\in \mathrm{rep}_K Q$ とすると，この表現の間のすべての射の集合 $\mathrm{Hom}(M,M')$ を考えることができる．これは射の加法とスカラー倍で K 上ベクトル空間になる．また，前の例から，M と M'' の間のすべての射の集合を考えると，

$$\mathrm{Hom}(M,M'')\cong\{(a,0)\mid a\in K\}\cong K$$

となる．最後の同型はベクトル空間 $\{(a,0)\mid a\in K\}$ の次元が 1 であることから従う．

Q の表現 $M=(M_i,\varphi_\alpha)$，$M'=(M'_i,\varphi'_\alpha)$，$M''=(M''_i,\varphi''_\alpha)$ についてそれぞれの表現の間の射 $f=(f_i)_{i\in Q_0}\colon M\to M'$ と $g=(g_i)_{i\in Q_0}\colon M'\to M''$ を考える．この射の合成 $g\circ f$ を

$$g\circ f=(g_if_i)_{i\in Q_0}$$

と定めれば，$g\circ f\colon M\to M''$ で，これも表現の間の射になる．以上から，Q の表現とそれらの表現の間の射で圏を構成することができ，これを $\mathrm{Rep}_K Q$ と書く．特に Q の表現が有限次元であるときはこれらを対象とする $\mathrm{Rep}_K(Q)$ の充満部分圏を $\mathrm{rep}_K Q$ と書く．圏 $\mathrm{rep}(Q)$ は加法的な線型圏になっている．すなわち，$\mathrm{Hom}(M,N)$ が任意の $M,N\in\mathrm{rep}(Q)$ について K 上ベクトル空間になっていて，その合成が双線型となる．また，加法的であることから $\mathrm{rep}(Q)$ は直和を持ち，零対象 $0\in\mathrm{rep}(Q)$ が存在して，ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(0,0)$ の零元が恒等射 $1_0\in\mathrm{Hom}(0,0)$ となる．

定義 3.10. $M=(M_i,\varphi_\alpha)$，$M'=(M'_i,\varphi'_\alpha)$ を Q の表現とする．このとき，

$$M\oplus M'=\left(M_i\oplus M'_i,\begin{bmatrix}\varphi_\alpha & 0\\ 0 & \varphi'_\alpha\end{bmatrix}\right)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$$

も Q の表現であり，これを M と M' の**直和**という．

定義 3.11. Q の表現 M が**直既約**とは，$M\neq 0$ かつ M が二つの非零な表現の直和で書けない時をいう．すなわち，Q の表現 $L\oplus N$ に対して $M\cong L\oplus N$ を満たすとき，$L=0$ または $N=0$ となるときをいう．

$M=(M_i,\varphi_\alpha)$，$M'=(M'_i,\varphi'_\alpha)$ を Q の表現とし，$f=(f_i)_{i\in Q_0}\colon M\to M'$ を表現の間の射とする．各頂点 $i\in Q_0$ について $L_i=\mathrm{Ker}(f_i)$ とし，Q_1 の各矢印 $\alpha\colon i\to j$ について，$\psi_\alpha\colon L_i\to Lj$ を L_i による φ_α の制限とする．すなわち，任意の $x\in L_i$ について $\psi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(x)$ となる．ψ_α の well–defined 性については，任意の $x\in L_i$ について，$\psi_\alpha(x)\in L_j$ を示す必要がある．このとき，$\varphi_\alpha(x)\in\mathrm{Kef}(f_j)$ をとなればよい．しかし，f が表現の間の射であることから，$f_j\circ\varphi_\alpha(x)=\varphi'_\alpha\circ f_i(x)$ となり，$x\in\mathrm{Ker}(f_i)$ より $f_j\circ\varphi_\alpha(x)=0$ なので，$\varphi_\alpha(x)\in\mathrm{Kef}(f_j)$ となる．したがって，ψ_α は well–defined になる．以上より，表現の射 f の**核**とは，表現 $\mathrm{Ker}(f)=(L_i,\psi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ として定義する．また，このとき埋め込み $\mathrm{incl}_i\colon \mathrm{Ker}f_i\to M_i$ から表現の単射

$$(\mathrm{incl}_i)_{i\in Q_0}\colon \mathrm{Kef}(f)\to M$$

も自然に誘導される．

また，表現の射 f についてその余核も定義できる．各頂点 $i\in Q_0$ について，$N_i=\mathrm{Coker}(f_i)=M'_i/f_i(M_i)$ とし，各矢印 $\alpha\colon i\to j$ について，$\chi_\alpha\colon N_i\to N_j$ を各 $m'_i\in M'_i$ に対して

$$\chi_\alpha(m'_i+f_i(M_i))=\varphi'_\alpha(m'_i)+f_j(M_j)$$

として定義する．χ_α の well–defined 性について示す．二つの元 $m'_i,m''_i\in M'_i$ で $m'_i+f_i(M_i)=m''_i+f_i(M_i)$ となっているとすると $m'_i-m''_i\in f(M_i)$ であり，したがって，$\varphi'_\alpha(m'_i)-\varphi'_\alpha(m''_i)=\varphi'_\alpha(m'_i-m''_i)$ が $\varphi'_\alpha\circ f_i(M_i)=f_j\circ\varphi_\alpha(M_i)\subseteq f_j(M_j)$ に存在する．したがって $\chi_\alpha(m'_i+f_i(M_i))=\chi_\alpha(m''_i+f_i(M_i))$ となるので，χ_α が well–defined になる．以上より，表現の射 f の**余核**とは，表現 $\mathrm{Coker}(f)=(N_i,\chi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ で定義する．また，このとき自然な全射 $\mathrm{proj}_i\colon M'_i\to\mathrm{Coker}(f_i)$ から表現の全射

$$(\mathrm{proj_i})_{i\in Q_0}\colon M'\to\mathrm{Coker}(f)$$

が自然に誘導される．

また，表現の射 f について**像**は，各頂点 $i \in Q_0$ について，$f(M_i)$ とし，各矢印 $\alpha\colon i \to j$ については $\phi_\alpha(f_i(m_i)) = f_j\varphi_\alpha(m_i)$ と定めることによって，表現 $\mathrm{Im}(f) = (f(M_i), \phi_\alpha)$ として定義する．

定義 3.12. M を Q の表現とする．ある表現 L に対して，単射 $i\colon L \to M$ が存在するとき，L は M の**部分表現** (subrepresentation) という．この状況において，**商表現** (quotient representation) M/L を i の余核として定義する．

第一同型定理より，表現の射 $f\colon M \to N$ について

$$\mathrm{Im}(f) \cong M/\mathrm{Kef}(f)$$

も成り立つ．表現 M を $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ とすると，表現 $M/\mathrm{Ker}(f)$ は $M/\mathrm{Ker}(f) = (M_i/\mathrm{Kef}(f_i), \chi_\alpha)$ として定義し，このとき $\chi_\alpha(m_i + \mathrm{Kef}(f_i)) = \varphi_\alpha(m_i) + \mathrm{Kef}(f_j)$ とする．各 f_i は線形写像なので，ベクトル空間の同型写像

$$\overline{f_i}\colon M_i/\mathrm{Ker}(f_i) \to f_i(M_i); \quad m_i + \mathrm{Kef}(f_i) \mapsto f_i(m_i)$$

が誘導される．さらに各矢印 $\alpha\colon i \to j$ について，$\psi_\alpha \circ \overline{f_i} = \overline{f_j} \circ \varphi_\alpha$ となり，$\overline{f}$ が表現の間の射であることを示している．

有界箙を考えたときと同じように箙 Q の表現にも許容イデアル I による制限を自然と入れることができる．$M = (M_i, \varphi_\alpha)$ を Q の表現とし，w を長さ 1 以上の $i \in Q_0$ から $j \in Q_0$ への道とする．すなわち，

$$w = \alpha_1 \cdots \alpha_l \quad (\alpha_i \in Q_1)$$

のような状況を考えている．このときそれぞれの矢印に対応する線形写像 φ_α を用いて，

$$\varphi := \varphi_{\alpha_l} \cdots \varphi_{\alpha_1}$$

と定めることができる．（写像の合成規則から順番が逆になっているので注意する．）さらに関係式，

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

に対して，

$$\varphi_\rho := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}$$

と定める．以上の下で Q の表現について許容イデアル I による制限を入れよう．

定義 3.13. Q を有限な箙とし，I を道代数 KQ の許容イデアルとする．Q の表現 $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ が I **の関係式を満たす**とは任意の関係式 $\rho \in I$ に対して，$\varphi_\rho = 0$ となるときをいう．

許容イデアル I の関係式を満たす Q の表現からなる $\mathrm{Rep}_K Q$ の充満部分圏を $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$ と書く．同様に表現が有限次元の場合は $\mathrm{rep}_K(Q, I)$ と書く．すると，$\mathrm{Rep}_K(Q, I)$ と KQ/I 加群からなる圏の間には次が成り立つ．

定理 3.14. K を体，Q を有限な箙とし，I を KQ の許容イデアルとする．次の圏同値がある．

$$\mathrm{Mod}(KQ/I) \cong \mathrm{Rep}(Q, I)$$

同様に，

$$\mathrm{mod}(KQ/I) \cong \mathrm{rep}_K(Q, I)$$

K が代数閉体だとすると，K 上の代数 A からなる加群圏 $\mathrm{Mod}A$ は $\mathrm{Mod}KQ/I$ と圏同値になることが知られている．したがって，前の定理と合わせて代数閉体上の代数は対応する Q の表現とも圏同値となる．また，定理から自然と次が成り立つ．

系 3.15. Q を非巡回かつ連結で有限な箙とする．このとき次の圏同値がある．

$$\mathrm{Mod}(KQ) \cong \mathrm{Rep}_K(Q)$$

同様に

$$\mathrm{mod}(KQ) \cong \mathrm{rep}_K(Q)$$

以上より有限次元代数 $A = KQ/I$ 上の加群と有界箙 (Q, I) の表現には圏同値が存在するので，これらに本質的な違いはない．次に加群の場合と同様に箙の表現に対する単純表現，射影表現，移入表現を紹介する．

定義 3.16. 表現 $S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)$ が頂点 $i \in Q_0$ の**単純表現** (simple representation) とは，任意の頂点 $j \in Q_0$ について，ベクトル空間を

$$S(i)_j = \begin{cases} K & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義し，任意の $\alpha \in Q_1$ に対して，$\varphi_\alpha = 0$ としたものである．

表現 $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ が頂点 $i \in Q_0$ の**射影表現** (projective representation) とは次で構成されるものである．まず，$P(i)_j$ に対しては頂点 i から j へのすべての道の集合を

基底とした K 上ベクトル空間を置く．$j \xrightarrow{\alpha} l$ を Q 上の道とすると，$\varphi_\alpha\colon P(i)_j \to P(i)_l$ を i から j への道と矢印 $j \xrightarrow{\alpha} l$ の合成による基底上の線形写像として定義する．すなわち $P(i)_j$ の基底からと $P(i)_l$ の基底への写像は単射となり，要素ごとの対応は

$$c = (i \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \mid j) \mapsto c\alpha = (i \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \alpha \mid l)$$

となる．したがって，$P(i)_j$ を $\lambda_c \in K$ を用いて $\sum_c \lambda_c\, c$ の形で書けば，φ_α は次で定義できる．

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c\ c\right) = \sum_c \lambda_c\ c\ \alpha$$

となる．

表現 $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)$ が頂点 $i \in Q_0$ の**移入表現** (injective representation) とは次で構成されるものである．まず，$I(i)_j$ に対しては頂点 j から i へのすべての道の集合を基底とした K 上ベクトル空間を置く．$j \xrightarrow{\alpha} l$ を Q 上の道とすると，$\varphi_\alpha\colon I(i)_j \to I(i)_l$ を α を始点とする j から i への道から矢印 $j \xrightarrow{\alpha} l$ の道を消し，α が始点でない道については 0 に送ることによって得られる基底上の線形写像として定義する．すなわち，$I(i)_j$ の基底から $I(i)_l$ の基底に送る写像は全射となり，要素ごとの対応は

$$c = (j \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \mid i) \mapsto \begin{cases} (l \mid \beta_2, \ldots, \beta_s \mid i) & (\beta_1 = \alpha) \\ 0 & (\beta_1 \neq \alpha) \end{cases}$$

となる．したがって，$I(i)_j$ を $\lambda_c \in K$ を用いて $\sum_c \lambda_c\, c$ の形で書き，この写像を f とすれば,

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c\ c\right) = \sum_c \lambda_c\ f(c)$$

となる．

注意 17. 頂点 i の射影表現を $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ とし，i から j への道を $c = (i \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l \mid j)$ とする．すると道 c に沿った表現 $P(i)$ の写像の合成で次の写像が定義できる．

$$\varphi_c\colon P(i)_i \to P(i)_j \quad \varphi_c = \varphi_{\beta_l} \cdots \varphi_{\beta_2}\varphi_{\beta_1}$$

すると，もし e_i が頂点 i の自明な道だとすると $P(i)$ の定義から次が従う．

$$\varphi_c(e_i) = c$$

頂点 i の射影表現に対して，$s(\alpha) = i$ となるような矢印 $\alpha \in Q_1$ が存在しないとき，**単純射影表現**という．また，このような頂点を箙 Q の**沈点** (sink) という．したがって，i が

Q で沈点であることと $S(i) = P(i)$ となることが同値となる．同様に，頂点 i の移入表現に対して，$t(\alpha) = i$ となるような Q の矢印 $\alpha \in Q_1$ が存在しないとき，**単純移入表現**という．また，このような頂点を箙 Q の**湧点** (source) という．したがって，i が Q で湧点であることと $S(i) = I(i)$ であることが同値である．

命題 3.17. Q の表現について次が成り立つ．

(1) P，P' を Q の表現とすると，$P \oplus P'$ が射影表現であることと P と P' が射影表現であることが同値となる．

(2) I，I' を Q の表現とすると，$I \oplus I'$ が移入表現であることと I と I' が移入表現であることが同値となる．

証明. (2) も同様に示すことができるので，(1) だけ示すことにする．

$P \oplus P'$ が射影表現であるとする．$g\colon M \to N$ が $\mathrm{rep}(Q)$ における全射とし，$f\colon P \to N$ を任意の射とし，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & P \oplus P' \arrow[d, "pr_1"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & \\
 & P \arrow[u, bend right, "i_1"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで，$pr_1\colon P \oplus P' \to P$ は射影で，$i_1\colon P \to P \oplus P'$ は移入である．明らかに $pr_1 \circ i_1 = 1_P$ である．$P \oplus P'$ が射影表現であるので，$g \circ h = f \circ pr_1$ を満たすような射 $h\colon P \oplus P' \to M$ が存在する．したがって，

$$g \circ h \circ i_1 = f \circ pr_1 \circ i_1 = f \circ 1_P = f$$

となる．ここで，$h' = h \circ i_1$ として $h'\colon P \to M$ を定義すると．$g \circ h' = f$ となる．よって，P が射影表現となる．P' についても同様に示せる．

逆に，P と P' が射影表現であると仮定し，表現 $P \oplus P'$ について次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddl, dashed, "h_1"'] & \\
 & P \oplus P' \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき，P が射影表現なので，$g \circ h_1 = f \circ i_1$ を満たすような射 $h_1 \colon P \to M$ が存在する．また，対称的に $g \circ h_2 = f \circ i_2$ を満たすような射 $h_2 \colon P' \to M$ も存在する．$p \in P$, $p' \in P$ に対し，$h(p+p') = h_1(p) + h_2(p')$ によって，$h = (h_1, h_2) \colon P \oplus P' \to M$ を定義すると，

$$g \circ h(p+p') = g \circ h_1(p) + g \circ h_2(p') = fi_1(p) + fi_2(p') = f(p+p')$$

が成り立つ．したがって，$P \oplus P'$ が射影表現である． □

この命題により，直既約射影表現および，直既約移入表現を知っていれば，すべての射影表現と移入表現を得ることができる．次の命題によりそれぞれの表現が実際に直既約になることを示そう．

命題 3.18. Q の頂点 i に対する．単純表現 $S(i)$，射影表現 $P(i)$，移入表現 $I(i)$ は直既約になる．

証明. $S(i)$ が直既約なことは $S(i)$ が単純であることがから直接従う．射影表現 $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ が直既約になることを示す．Q は非巡回な箙なので，$P(i)_i = K$ となる．$M, N \in \mathrm{rep}(Q)$ について，$P(i) = M \oplus N$ であると仮定すると，一般性を損なうことなく $P(i)_i = M_i$ かつ $N_i = 0$ であると仮定できる．ここで，$N_l \neq 0$ となるような Q の頂点を l とすると，$P(i)_l$ は Q 上で i から l への道で構成される基底を持つ．そのような道を $c = (i \mid \beta_1, \ldots, \beta_s \mid l)$ とする．c に沿った表現 $P(i)$ の線形写像の合成を $\varphi_c = \varphi_{\beta_s} \cdots \varphi_{\beta_1}$ とすると，$P(i)$ は M と N の直和なので，写像

$$\varphi_c \colon M_i \oplus 0 \to M_l \oplus N_l$$

は M_i の一意な基底 e_i を M_l の元 $\varphi_c(e_i)$ に送る．しかし，$\varphi_c(e_i) = c$ であるので，すべての $P(i)_l$ の基底 c は M_l 上に存在する．これは矛盾である．したがって，$P(i)$ は直既約となる．$I(i)$ も同様に示すことができる． □

また，射影表現の根基を定義しておく．

定義 3.19. 任意の頂点 i の射影表現を $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ とする．$P(i)$ の**根基** (radical) とは，任意の頂点 $j \in Q_0$ について，ベクトル空間を

$$R_i = 0,\ R_j = P(i)_j \quad (i \neq j)$$

で定義し，任意の矢印 $\alpha \in Q_1$ について，

$$\varphi'_\alpha = \begin{cases} 0 & (s(\alpha) = i) \\ \varphi_\alpha & (s(\alpha) \neq i) \end{cases}$$

としたときの表現 $\mathrm{rad}(P(i)) = (R_j, \varphi'_\alpha)$ である．

また，定義より明らかに次が従う．

補題 3.20. 任意の頂点 $i \in Q_0$ について，$P(i)$ が単純表現なら，$\mathrm{rad}(P(i)) = 0$ となり，$P(i)$ が単純表現でないなら $\mathrm{rad}(P(i))$ は射影表現である．

では次はこれらの表現を有界箙上の表現として拡張していく．最初に単純表現だが，単純表現 $S(i)$ は Q の任意の許容イデアル I による有界箙 (Q, I) の表現にそのままなる．したがって，次の補題を得ることができる．

補題 3.21. $A = KQ/I$ を有界箙代数とすると次が成り立つ．

(1) 任意の頂点 $i \in Q_0$ について $S(i)$ を A 加群としてみなすと，直既約射影加群 e_iA の頂点 $\mathrm{top}(e_iA)$ と同型となる．
(2) 集合 $\{S(i) \mid i \in Q_0\}$ が単純加群の同型類の表現の完全集合になる．

また，有界箙上の任意の表現に関して底，根基，底を次の補題で示す．

補題 3.22. $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ を有界箙 (Q, I) の表現とする．次が成り立つ．

(1) M が半単純であることと，任意の矢印 $\alpha \in Q_1$ について $\varphi_\alpha = 0$ となることが同値となる．
(2) M の底 $\mathrm{soc}(M) = N$ を表現 $N = (N_i, \psi_\alpha)$ とする．このとき，もし頂点 i が沈点なら $N_i = M_i$ とし，一方で頂点 i が沈点でないなら，

$$N_i = \bigcap_{\alpha\colon i \to j} \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha\colon M_i \to M_j)$$

とする．また，湧点 i のすべての矢印 α について $\psi_\alpha = 0$ とする．ここで，ψ_α は N_i による φ_α の制限である．以上で N は M の底となる．
(3) M の根基 $\mathrm{rad}(M) = J$ を表現 $J = (J_i, \gamma_\alpha)$ とする．このとき，

$$J_i = \sum_{\alpha\colon j \to i} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha\colon M_j \to M_i)$$

とする．また，湧点 i のすべての矢印 α について γ_α を φ_α の J_i による制限とする．以上で J は M の根基になる．
(4) M の頂点 $\mathrm{top}(M) = L$ を表現 $L = (L_i, \psi_\alpha)$ とする．このとき，もし頂点 i が湧点

なら $L_i = M_i$ とし，一方で頂点 i が湧点でないなら

$$L_i = \sum_{\alpha\colon jtoi} \mathrm{Coker}(\psi_\alpha\colon M_j \to M_i)$$

とする．また，湧点 i のすべての矢印 α について $\psi_\alpha = 0$ とする．以上で L が M の頂点になる．

証明. (1)：すべての矢印 $\alpha \in Q_1$ について $\varphi_\alpha = 0$ であることから．

$$M \cong \bigoplus_{i \in Q_0} S(i)^{\dim_K(M_i)}$$

が成り立つので従う．

(2)：はじめに，ψ_α は N_i による φ_α の制限なので，M の部分加群になる．また，各矢印 α について $\psi_\alpha = 0$ より半単純である．右 A 加群 S_A を M の単純部分加群とすると $S \cong S(i)$ を満たすような頂点 $i \in Q_0$ が存在する．したがって，各矢印 $\alpha\colon i \to j$ について次の可換図式を得る．

$$\begin{CD}
K = S(i)_i @>>> S(i)_j = 0 \\
@VVV @VVV \\
M_i @>{\varphi_\alpha}>> M_j
\end{CD}$$

したがって各矢印 $\alpha\colon i \to j$ について $S(i)_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha)$ となり，$S(i)_i \subseteq N_i$ となる．よって $S(i) \subseteq N$ が成り立ち，ゆえに $N = \mathrm{soc}(M)$ となる．

(3)：R を KQ の矢印イデアルとする．$\mathrm{rad}(A) = R/I$ となるので，矢印 α の I を法とする剰余類によって両側イデアルが生成される．$\overline{\alpha} = \alpha + I$ として次のようになる．

$$J = \mathrm{rad}(M) = M\mathrm{rad}(A) = M(R/I) = \sum_{\alpha \in Q_1} M\overline{\alpha}$$

したがって，任意の頂点 $i \in Q_0$ について，$J_i = \sum_{\alpha\colon j \to i} M\overline{\alpha}$ となる．これは終点が i となるようなすべての矢印の和である．φ_α の作用が $\overline{\alpha}$ のによって右からの積として対応するので，そのような各矢印 $\alpha\colon j \to i$ は $M\overline{\alpha} = Me_j\overline{\alpha} = M_j\overline{\alpha} = \varphi_\alpha(M_j) = \mathrm{Im}(\varphi)$ から生成される．したがって，$J_i = \sum_{\alpha\colon j \to i} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha\colon M_j \to M_i)$ となる．したがって，J は M の部分加群になっていて，さらに，γ_α が φ_α の J_i による制限になる．

(4)：$L = M/(M\mathrm{rad}(A)) = M/\mathrm{rad}(M)$ より，(3) から従う． □

表現の圏と加群の圏の間には圏同値の関係があった．よって，射影加群を有界箙代数 $A = KQ/I$ 上の直既約射影加群として計算したい．A の原始的直交冪等元の完全系

$\{e_i \mid i \in Q_0\}$ が存在しているので，$A_A = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i A$ のように直既約射影加群の直和として A_A が分解されている．これを，任意の $i \in Q_0$ について，射影加群 $P(i) = e_i A$ として記述したいということだ．つぎの補題で具体的に見ていく．

補題 3.23. (Q, I) を有界箙とし，$A = KQ/I$ を有界箙代数，任意の頂点 i について射影加群を $P(i) = e_i A$ とする．次が成り立つ．

(1) 射影表現を $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ とする．このとき，$P(i)_j$ は, 頂点 i から j への道 w について，$\overline{w} = w + I$ となるようなすべての道の集合を基底としたベクトル空間となり，また，任意の矢印 $\alpha\colon j \to k$ について，$\varphi_\alpha\colon P(i)_j \to P(i)_k$ は $\overline{\alpha} = \alpha + I$ による右からの積によって与えられる線形写像となる．

(2) $\mathrm{rad}(P(i)) = (P'(i)_j, \varphi'_\alpha)$ とする．すると $i \neq j$ について $P'(i)_j = P(i)_j$ となり，$P'(i)_i$ は頂点 i から i への自明な道 w で $\overline{w} = w + I$ となるすべての道の集合を基底としたベクトル空間となる．また，終点が $j \neq i$ となるような任意の矢印 α について $\varphi'_\alpha = \varphi$ となり，終点が i となるような任意の矢印 β については φ'_β は φ_α の $P(i)'_i$ による制限になる．

証明. (1)：A 加群と表現が同一視できるので，任意の頂点 j について，

$$P(i)_j = P(i)e_j = e_i A e_j = e_i(KQ/I)e_j = (\epsilon_i(KQ)e_j)/(\epsilon_i I \epsilon_j)$$

となり，A 加群 $P(i)_A = e_i A$ へと対応する．さらに Q の矢印を $\alpha\colon j \to k$ とすると $\varphi_\alpha\colon e_i A e_j \to e_i A e_k$ が剰余類 $\overline{\alpha} = \alpha + I$ によって右からの積で与えられる．すなわち，$\overline{w}$ が頂点 i から j への道 w の剰余類だとすると $\varphi_\alpha(\overline{w}) = \overline{w\alpha}$ となる．(2) は (1) から根基を考えてそのまま従う． □

次は有界箙代数 $A = KQ/I$ について，有界箙 (Q, I) の移入表現を直既約移入 A 加群として記述したい．射影加群の場合と同様に原始的直交冪等元の完全系を用いて直既約移入 A 加群を任意の頂点 $i \in Q_0$ について $I(i) = D(Ae_i)$ として与える．ここで，$D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ は標準双対である．では次の補題で示していく．

補題 3.24. (1) 頂点 i について，単純加群 $S(i)$ が $I(i)$ の単純な底 $\mathrm{soc}(I(i))$ と同型になる．

(2) 移入表現を $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)$ とする．このとき，$I(i)_j$ は頂点 j から頂点 i への道 w について，$\overline{w} = w + I$ となるようなすべての道の集合を基底としたベクトル空間となり，また，任意の矢印 $\alpha\colon j \to k$ について，$\varphi_\alpha\colon I(i)_j \to I(i)_k$ は $\overline{\alpha} = \alpha + I$ による左からの積によって与えられる線形写像となる．

(3) $I(i)/S(i) = (L_j, \psi_\alpha)$ とする．このとき，L_j は長さが 1 以上の j から i への道の剰余類によって生成されている $I(i)_j$ の商空間となっている．また，ψ_α はこれにより誘導された写像となる．

証明. (1)：右 A 加群として次の同型を得ることができるので従う．

$$I(i) \cong P(i)/\mathrm{rad}P(i) \cong S(i)$$

(2)：次の同型が存在するので，補題 3.23 から従う．

$$I(i)_j = I(i)e_j = D(Ae_i)e_j \cong D(e_jAe_i) \cong D(\epsilon_j(KQ)\epsilon_i/\epsilon_jI\epsilon_i)$$

同様にある矢印 $\alpha\colon j \to k$ について, 線形写像が $D(\epsilon_j(KQ)\epsilon_i/\epsilon_jI\epsilon_i) \to D(\epsilon_k(KQ)\epsilon_i/\epsilon_kI\epsilon_i)$ が $\mu_\alpha\colon (\epsilon_k(KQ)\epsilon_i/\epsilon_kI\epsilon_i) \to (\epsilon_j(KQ)\epsilon_i/\epsilon_jI\epsilon_i)$ を左からの積にとして $\overline{w} \mapsto \overline{\alpha w}$ とすると，$\varphi_\alpha = D(\nu_\alpha)$ が $f \in D(\epsilon_j(KQ)\epsilon_i/\epsilon_jI\epsilon_i)$ について $\varphi_\alpha(f) = f \circ \nu_\beta$ によって与えられる．一方で，$\varphi_\alpha(f)(\overline{w}) = f(\overline{\alpha w})$ である．(3) は (2) の結果から従う． □

定義 3.25. 圏 $\mathrm{mod}(A)$ の自己関手を標準双対 $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ を用いて,

$$\nu(-) = D\mathrm{Hom}_A(-, A)\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A)$$

で定義する．これを**中山関手** (Nakayama functor) という．

命題 3.26. 対象がすべて射影加群であるような $\mathrm{mod}(A)$ の充満部分圏 $\mathrm{proj}(A)$ による中山関手 $\nu\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ の制限は $\mathrm{proj}(A)$ と対象がすべて移入加群であるような $\mathrm{mod}(A)$ の充満部分圏 $\mathrm{inj}(A)$ の間に圏同値を誘導する．また，この制限の擬逆は $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_A(D({}_AA), -) : \mathrm{inj}(A) \to \mathrm{proj}(A)$ によって与えられる

証明. 任意の頂点 $i \in Q_0$ について,

$$\nu P(i) = D\mathrm{Hom}_A(P(i), A) = D\mathrm{Hom}_A(e_iA, A) \cong D(Ae_i) = I(i)$$

より ν における $\mathrm{proj}(A)$ の像は $\mathrm{inj}(A)$ に存在する．一方で,

$$\begin{aligned}\nu^{-1}I(i) = \mathrm{Hom}_A(D({}_AA), I(i)) &= \mathrm{Hom}_A(D({}_AA), D(Ae_i)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Ae_i, A) \\ &\cong e_iA = P(i)\end{aligned}$$

となる．よって成り立つ． □

補題 3.27. $A = KQ/I$ を有界箙代数とする．任意の A 加群 M と頂点 $i \in Q_0$ について，次のベクトル空間の同型が存在する．

$$\mathrm{Hom}_A(P(i), M) \cong Me_i \cong D\mathrm{Hom}_A(M, I(i))$$

証明. $\mathrm{Hom}_A(P(i), M) \to Me_i$ は補題 2.47 から $f \mapsto f(e_i) = f(e_i)e_i$ なる対応により成り立つ．また，このとき $Me_i \to \mathrm{Hom}_A(P(i), M)$ は任意の $m \in M$ と $a \in A$ で $(me_i)(e_i a) = me_i a$ と定義すれば, $me_i \in Me_i$ を固定して $(me_i)\colon P(i) \to M$ で逆を与えられる．これは $e_i a \in P(i)$ において, a の取り方によらない．よって, $\mathrm{Hom}_A(P(i), M) \cong Me_i$ $Me_i \cong D\mathrm{Hom}_A(M, I(i))$ は

$$\begin{aligned} D\mathrm{Hom}_A(M, I(i)) &= D\mathrm{Hom}_A(M, D(Ae_i)) \\ &\cong D\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae_i, DM) \\ &\cong D\mathrm{e_i DM} \\ &\cong D(DM)e_i \cong Me_i \end{aligned}$$

より成り立つ． □

4 Auslander-Reiten 理論

この章を通して K は代数閉体であるとし，A を基本的有限次元 K 代数とする．また，A の原始的直交冪等元の完全系を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とし，各 e_i に対応する単純 A 加群を $S(i)$，直既約射影 A 加群を $P(i)$，直既約移入 A 加群を $I(i)$ で表すことにする．

4.1 代数閉体の有限次元代数の表現型

代数の表現論の大きな問題意識のひとつとして,「標準形の分類問題」がある. 例えば, 有限生成アーベル群の基本定理は自然数の素因数分解の存在と一意性を与える問題の一般化であるし, 代数閉体 K 上の 1 変数多項式環 $K[X]$ の n 次元直既約加群は $K[X]/(X-\lambda)^n$ に同型であって, その表現は Jordan 標準形である．その後, この Jordan 標準形の分類を基にして, 同じサイズをもつ行列の組を同時に標準化する問題が 19 世紀後半に提唱され, Kronecker によってその解を得た．これは Kronecker 標準形と呼ばれるもので,「無限順表現型」 の基本的なモデルである．このように表現の型を標準型にして分類する問題は表現論の基本的な問題のひとつである．表現型の大きな括りは Drozd によって与えられた [D79].

定義 4.1. K を代数閉体, A を有限次元 K 代数とする.

(1) A が**有限表現型**（representation-finite）であるとは, 有限次元直既約 A 加群の同型類が高々有限個しかないときをいう.

(2) A が**順表現型** (representation-tame) であるとは, 自然数 d を固定すると, 左加群として自由な有限生成 $(K[X], A)$ 両側加群 $M_1, \ldots, M_{n_d}$ であって, 有限個を除く全ての d 次元直既約右 A 加群が, ある i と $\lambda \in K$ によって $K[X]/(X-\lambda) \otimes_{K[X]} M_i$ の形に表せるときをいう.

(3) A の表現型が**野生型**（wild）とは, 左加群として自由な有限生成 $(K\langle X, Y\rangle, A)$ 両側加群 M が存在して, 同型と直既約性を保つ関手

$$- \otimes_{K\langle X,Y\rangle} M : \mathrm{mod}\ K\langle X, Y\rangle \longrightarrow \mathrm{mod}\ A$$

が存在するときにいう. ここで, $K\langle X, Y\rangle$ は以下の箙から構成される道代数 KQ である:

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "X"] \arrow[loop right, "Y"] \end{tikzcd}$$

表現型については, 次の結果が基本的である.

定理 4.2 ([D79])**.** K を代数閉体とする. 有限次元 K 代数は順表現型であるか, 野生型である.

この結果より, 特に野生型な K 代数の直既約表現の標準形による分類は絶望的であり, 順表現型について考察することになる.

冒頭に述べた Kronecker 標準形は, 行列束と呼ばれるものを使い, 膨大な計算と考察によって与えられている（例えば, [G74] などを見よ）. 一方, Kronecker 標準形を与えることは, Kronecker 代数の直既約加群の分類を行うことと対応していることが指摘された. これを受けて, 本章で紹介する有限次元代数の有限次元直既約加群の分類を与える Auslander–Reiten 理論の観点から Kronecker 標準形が整備され, 見通しの良い定式化が与えられるに至った. このような背景から, Kronecker 代数は順表現型の基礎モデルとして定着している.

4.2 概分裂完全列

A 加群における短完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

について，f が分裂単射または g が分裂全射となるとき，$M \cong L \oplus N$ となりこの短完全列が分裂すると言った．ここでは，完全列が分裂しない場合を考えるが，完全列が分裂しているときと近い概念を考えていきたい．その前に次の用語を定義しておく．

定義 4.3. L, M, N を A 加群とする．A 加群準同型 $f\colon L \to M$ が**左極小** (left minimal) とは，$h \circ f = f$ なるすべての $h \in \mathrm{End}(M)$ が自己同型写像になるときをいう．A 加群準同型 $g\colon M \to N$ が**右極小** (right minimal) とは，$g \circ h = g$ なるすべての $h \in \mathrm{End}(M)$ が自己同型同型写像になるときをいう．

定義 4.4. L, M, N を A 加群とする．A 加群準同型 $f\colon L \to M$ が**左概分裂** (left almost split) とは，f がセクションでなく，任意の A 加群 U とセクションでない任意の準同型 $u\colon L \to U$ に対して，$u = u' \circ f$ を満たす準同型 $u'\colon M \to U$ が存在するときをいう．

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{f}"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

A 加群準同型 $g\colon M \to N$ が**右概分裂** (right almost split) とは，g がレトラクションでなく，任意の A 加群 V とレトラクションでない任意の準同型 $v\colon V \to N$ に対して，$v = g \circ v'$ を満たす準同型 $V'\colon V \to M$ が存在するときをいう．

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

定義 4.5. L, M, N を A 加群とする．A 加群準同型 $f\colon L \to M$ が**左極小概分裂** (left minimal almost split) とは，f が左極小かつ左概分裂であると気をいう．

A 加群準同型 $g\colon M \to N$ が**右極小概分裂** (right minimal almost split) とは，g が右極小かつ右概分裂であるときをいう．

命題 4.6. L, M, N を A 加群とする．次が成り立つ．

(1) A 加群準同型 $f\colon L \to M$ と $f'\colon L \to M'$ が左極小概分裂であるとき，$h \circ f = f'$ となるような同型射 $h\colon M \to M'$ が存在する．

(2) A 加群準同型 $g\colon M \to N$ と $g'\colon M' \to N$ が右極小概分裂であるとき，$g' \circ k = g$ となるような同型射 $k\colon M \to M'$ が存在する．

証明. (1) だけ示す．f と f' が左概分裂なので，$h\colon M \to M'$ と $h'\colon M' \to M$ が存在し

て $f' = h \circ f$，$f = h' \circ f'$ となる．したがって，$f = h' \circ h \circ f$ と $f' = h \circ h' \circ f'$ となる．f と f' は左極小でもあるので，$h \circ h'$ と $h' \circ h$ は自己同型写像になる．よって，h は同型射になる．(2) も同様に示せる． □

補題 4.7. L，M，N を A 加群とする．次が成り立つ．

(1) A 加群準同型 $f\colon L \to M$ を左極小概分裂とすると，L は直既約となる．
(2) A 加群準同型 $g\colon M \to N$ を右極小概分裂とすると，N は直既約となる．

証明. (1) だけ示す．L が直既約でないとする．すなわち零加群でない二つの加群 L_1，L_2 で $L = L_1 \oplus L_2$ となるとする．また，$i = 1$，2 に対して $p_i\colon L \to L_i$ をそれぞれの加群に対応する射影とする．任意の i に対して準同型 p_i はセクションでないので，$u_i \circ f = p_i$ となるような準同型 $u_i\colon M \to L_i$ が存在する．しかし $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} : M \to L$ より，$u \circ f = 1_L$ となるので，f がセクションでないことに反する．したがって，L は直既約となる．(2) も同様に示せる． □

注意 18. $f\colon L \to M$ が左極小概分裂であるとき，$f'\colon L \to M \oplus M'$ $(M' \neq 0)$ で，$f' = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$ とすれば，f' も左極小概分裂になる．L からの左極小概分裂があれば，それをもとに新たな左概分裂写像を作ることができる．右の場合も同様に構築できる．

定義 4.8. X，Y を A 加群とする．A 加群準同型 $f\colon X \to Y$ が**既約写像** (irreducible morphism) とは次の条件を満たすものを言う．

- f がセクションでもレトラクションでもない
- $f = f_1 \circ f_2$ となるとき，f_1 がレトラクションまたは f_2 がセクションになる．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathrm{f}"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

命題 4.9. $f\colon X \to Y$ が既約写像であるとすると，次が成り立つ．

(1) f が単射または全射になる．（全単射にはならない）
(2) f は自明な方法でしか分解できない

証明. (1)：f が全射でないとし，任意の $x \in X$ について $\overline{f}(x) = f(x)$ と定めることによって射 $\overline{f}\colon X \to \mathrm{Im}(f)$ を定義する．また，$i\colon \mathrm{Im}(f) \to Y$ を埋め込み写像とする．f が

既約写像であることから $f = i \circ \overline{f}$ となり，このとき，i はレトラクションでないが，$\overline{f}$ はセクションになる．したがって，このとき f は単射となる．また，f が単射でないとする．準同型定理を考えれば標準全射 $k\colon X \to X/\mathrm{Ker}(f)$ と，$\overline{f}\colon X/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ となる射が存在する．このとき，$i\colon \mathrm{Im}(f) \to Y$ を埋め込み写像とすれば，$f = (i \circ \overline{f}) \circ k$ となる．ここで f は既約写像であり，k はセクションでないので，$(i \circ \overline{f})\colon M/\mathrm{Ker}(f) \to N$ がレトラクションとなる．これがレトラクションになるためには $M/\mathrm{Ker}(f) \cong Y$ となればよい．したがって，f が全射となる．

(2)：f がある射 $g\colon X \to Z$ と $h\colon Z \to Y$ で $f = h \circ g$ と分解されているとする．f は既約写像であるので，g がセクションまたは h がレトラクションになる．(1) より f が単射だとすると f は全射でないので，h がレトラクションとならない．すると g がセクションである必要があり，$X \cong \mathrm{Im}(g)$ で，これが Z の直和因子となるので，この分解は自明となる．また，f が単射でなく全射であるとすると，h がレトラクションである必要がある．このとき，$Z = Y' \oplus \mathrm{Ker}(h)$ となるような Z の直和因子 Y' が存在してこれが Y と同型になる．この分解も自明である．$\square$

補足 8. 圏のイデアルと根基について補足しておく．圏 C を加法的線形圏であるとする．C の射のクラス I が圏 C の**両側イデアル** (two-sided ideal) であるとは，I が次の条件を満たすときをいう．

(1) 任意の対象 $X \in C$ に対して，零射 $0_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ が I に含まれる．
(2) $X, Y \in C$，$f, g\colon X \to Y$ とすると，$f, g \in I$ なら任意の $\lambda, \mu \in K$ に対して $\lambda f + \mu g \in I$ となる．
(3) $X, Y, Z \in C$，$f\colon X \to Y$ とすると，$f \in I$ なら，$g\colon Y \to Z$ に対して $g \circ f \in I$ となる．
(4) $X, X, Y \in C$，$f\colon X \to Y$ とすると，$f \in I$ なら，$h\colon W \to X$ に対して，$f \circ h \in I$ となる．

加法的線型圏 C の両側イデアルが I が与えられると，**商圏** (quotient category) と呼ばれる圏 C/I が定義できる．この圏の対象は C の対象であり，C/I の対象 X から Y への射の空間が $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ を部分空間 $I(X, Y)$ で割るような商空間

$$\mathrm{Hom}_{C/I}(X, Y) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)/I(X, Y)$$

となる．このとき，射影的な関手 $\pi\colon C \to C/I$ は C の各射 $f\colon X \to Y$ をこの圏の射の類 $f + I \in \mathrm{Hom}_{C/I}(X, Y)$ に対応させ，これが K 線型関手になる．したがって，商圏 C/I

は再び加法的線型圏となる．また，射影的関手 π は充満かつ密であり，$\mathrm{Kef}(\pi) = I$ となる．したがって，商圏 C/I は加法的線型圏になる．

K 線型関手 $F\colon A \to B$ の核とは，任意の A の対象 X と Y について，$F(h) = 0$ となるような C のすべての射 $h\colon X \to Y$ のクラス $\mathrm{Kef}(F)$ のことである．このとき $\mathrm{Ker}(F)$ は C の両側イデアルとなる．圏 A と圏 B を加法的線型圏とし，関手 $F\colon A \to B$ を充満で密な K 線型関手とすると，F は K 線型の同値を誘導し，線型圏として，$A/\mathrm{Ker}(F) \cong B$ が圏同値となる．これは準同型定理の一般化となっている．

加法的線型圏 C において，両側イデアル rad_C が**根基** (radical) とは，任意の C の対象 X，Y に対して，

$\mathrm{rad}_C(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y) \mid$ 任意の $g \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ に対して $1_X - g\circ f$ が同型 $\}$

となる射のクラスであると定義する．このとき, $f \in \mathrm{rad}_C(X,Y)$ であれば, $1_X - f^{-1}\circ f = 0$ となるので，$\mathrm{rad}_C(X,Y)$ の射は同型でないということである．また，これが圏 C における両側イデアルであることについてだが，両側イデアルの (1) の条件は定義より従う．$f, f' \in \mathrm{rad}_C(X,Y)$，$\lambda, \lambda' \in K$，$g \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ とし，

$$b \circ (1_X - g \circ \lambda f) = 1_X$$

を満たすような射を $b \in \mathrm{Hom}_C(X,X)$ とする．このとき，b は同型射になっている．すると，$f' \in \mathrm{rad}_C(X,Y)$ より，$b \circ (1_X - g \circ (\lambda f + \lambda' f') = 1_X - b \circ g \circ \lambda' f'$ が同型射になる．これから $(1_X - g \circ (\lambda f + \lambda' f'))$ が同型射になるので，$\lambda f + \lambda' f' \in \mathrm{rad}_C(X,Y)$ となり，(2) の条件が言える．(3) については $f \in \mathrm{rad}_C(X,Y)$，$g \in \mathrm{rad}_C(Y,Z)$ とすると，各 $h \in \mathrm{rad}_C(Z,X)$ について，$h \circ g \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ を得る．このとき，$1_X - (h \circ g) \circ f$ が可逆になる．すると $1_X - h \circ (g \circ f)$ が可逆になるので，$g \circ f \in \mathrm{rad}_C(X,Z)$ となるので (3) が言える．(4) も同様に示すことができる．

また，$m \geq 1$ について，rad_C の m 乗 $\mathrm{rad}_C^m \subseteq \mathrm{rad}_C$ を $h_j \in \mathrm{rad}_C(X_{j-1}, X_j)$ で，

$$X = X_0 \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_2} X_2 \to \cdots \to X_{m-1} \xrightarrow{h_m} X_m = Y$$

の形の射の列を考え，このときの射のすべての有限和で構成された $\mathrm{rad}_C(X,Y)$ の部分空間として $\mathrm{rad}_C^m(X,Y)$ を取ることによって定義する．例えば，$\mathrm{rad}_C^2(X,Y)$ を考えれば，次の射の列

$$X = X_0 \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_2} X_2 = Y$$

となり，任意の射 $h_1 \in \mathrm{rad}_C(X_0, X_1)$ と $h_2 \in \mathrm{rad}_C(X_1, X_2)$ で，部分空間として，$\mathrm{rad}_C^2(X,Y) = \sum h_2 \circ h_1$ となる．これも圏 C の両側イデアルとなる．

圏として有限生成右 A 加群の圏 $\mathrm{mod}(A)$ を考える．このとき圏としての根基を $\mathrm{rad}_{mod(A)} = \mathrm{rad}_A$ と表すことにする．ここで，既約写像の必要十分条件を $\mathrm{mod}(A)$ の根基を用いることによって得られることを示していく．

補題 4.10. X，Y を直既約 A 加群とすると次が成り立つ．

$$\mathrm{rad}_A(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) \mid f \text{ がセクションでもレトラクションでもない } \}$$

証明. $(\subseteq)$：$f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$ とすると，f は同型射でない．X と Y は直既約なので，f はセクションでもレトラクションでもない．

$(\supseteq)$：セクションでもレトラクションでもない射を $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ とし，$g \in \mathrm{Hom}_A(Y,X)$ とする．すると $g \circ f \in \mathrm{End}_A(X)$ となる，このとき，代数 $\mathrm{End}_A(X)$ は X が直既約であることから局所代数となる．$g \circ f$ が同型射でないことを示す．ここで，$h \circ g \circ f = 1_X$ を満たすような $h \in \mathrm{End}_A(X)$ が存在したと仮定すると，$1_X = (h \circ g \circ f) \circ (h \circ g \circ f) = h \circ g \circ (f \circ h \circ g) \circ f$ となり，$f \circ h \circ g$ が $\mathrm{End}_A(Y)$ の非零な元になり，$(f \circ h \circ g)^2 = f \circ (h \circ g \circ f) \circ h \circ g = f \circ h \circ g$ となる．したがって，$f \circ h \circ g$ が $\mathrm{End}_A(Y)$ での非零な冪等元になり，$f \circ h \circ g = 1_Y$ となる．これは f がレトラクションでない仮定に反する．ここで，$g \circ f$ は同型射でないので，局所代数 $\mathrm{End}(X)$ において，$g \circ f$ が右逆元を持たない．ゆえに $\mathrm{End}_A(X)$ の一意な極大イデアル $\mathrm{radEnd}_A(X)$ に含まれているので，$1_X - g \circ f$ が両側逆元を持つ．これは同型射となっていて，ゆえに $f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$ となる． □

この補題より，X が直既約であるならば $\mathrm{rad}_A(X,X)$ は単に局所代数 $\mathrm{End}(X)$ の根基となる．また，$\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ も同様に定義でき，各加群 $Z \in \mathrm{mod}(A)$ について，$h \in \mathrm{rad}_A(X,Z)$ と $g \in \mathrm{rad}_A(Z,Y)$ で $f = g \circ h$ の形をしたすべての A 加群準同型で構成される．また明らかに $\mathrm{rad}_A^2(X,Y) \subseteq \mathrm{rad}_A(X,Y)$ となる．

命題 4.11. 直既約加群 $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$ に対して，$f\colon X \to Y$ が既約写像であることと，

$$f \in \mathrm{rad}_A(X,Y), f \notin \mathrm{rad}_A^2(X,Y)$$

が同値である．

証明. f が既約写像であるとすると，$f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$ が成り立つ．$f \in \mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ と仮定すると，$g \in \mathrm{rad}_A(Z,Y)$，$h \in \mathrm{rad}_A(X,Z)$ および各 Z_i が直既約であるような

$Z = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$ で次の図式が可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここで，h と g を $h_i \colon X \to Z$ と $g_i \colon Z_i \to Y$ を用いて次の行列表示で書くことにする．

$$
h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_t \end{bmatrix}
$$

f が既約写像なので，h がセクションまたは g がレトラクションになる．ここで，h がセクションであるとし，$1_X = h' \circ h$ を満たすような射を

$$
h' = \begin{bmatrix} h'_1 & h'_2 & \cdots & h'_t \end{bmatrix} \colon \bigoplus Z_i \to X
$$

とする．すると任意の i について，$h_i \in \mathrm{rad}_A(X, Z_i)$ を得る．したがって，$h'_i \circ h_i \in \mathrm{rad}_A(X, X) = \mathrm{radEnd}_A(X)$ となる．ゆえに $1_X = h' \circ h = \sum_i h'_i \circ h_i \in \mathrm{radEnd}(X)$ となり．これは $\mathrm{radEnd}_A(X) \neq \mathrm{End}_A(X)$ であることに矛盾する．したがって h はセクションではない．同様な方法で g がレトラクションでないことも示すことができる．ゆえに $f \notin \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$ が成り立つ．

逆に $f \in \mathrm{rad}_A(X, Y)$ かつ $f \notin \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$ であるとする．X と Y が直既約であり，f が同型射でないので，f がセクションでもレトラクションでもないことが従う．$f = g \circ h$ を満たすような $h \colon X \to Z$，$g \colon Z \to Y$ および，Z_i が直既約であるような $Z = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$ を仮定する．すると再び h と g が行列表示で書くことができ，これらの合成により f が

$$
f = g \circ h = \sum_{i=1}^{t} g_i h_i
$$

の形で書ける．$f \notin \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$ より h_i の一つと g_j の一つが可逆になる必要がある．しかし，h_i が可逆であるとすると $1_X = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h_i^{-1} & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix} \circ h$ となりこれは h

がセクションであることを示している．また，g_j が可逆であるとすると，

$$1_Y = g \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_j^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，これは g がレトラクションになっていることを示している．したがって，f が既約写像であることが示せた． □

また，既約写像と極小概分裂について次の定理が成り立つ．

定理 4.12.

(1) $f\colon L \to M$ を圏 $\mathrm{mod}(A)$ における左極小概分裂とする．すると f は既約写像となる．

(2) $g\colon M \to N$ が圏 $\mathrm{mod}(A)$ における右極小概分裂とする．すると g は既約写像となる．

証明. (1) を示す．$\mathrm{mod}(A)$ における射 $f\colon L \to M$ が左極小概分裂写像であるとする．定義より f がセクションでない．また，L が直既約かつ f が同型射でないので，f がレトラクションでないことも言える．f が $f_2\colon L \to Z$ と $f_1\colon Z \to M$ で $f = f_1 \circ f_2$ と書けるとする．このとき，f_1 がレトラクションまたは f_2 がセクションになることを言えればよい．f_2 がセクションでないと仮定し，f_1 がレトラクションになることを示す．f が左概分裂であるので，$f_2 = f_2' \circ f$ となるような $f_2'\colon M \to Z$ が存在する．したがって，$f = f_1 \circ f_2 = f_1 \circ f_2' \circ f$ となる．f が左極小なので，$f_1 \circ f_2'$ は自己同型写像になっており，よって，f_1 がレトラクションになる．(2) も同様の手順で示すことができる． □

定義 4.13. 圏 $\mathrm{mod}(A)$ における短完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が**概分裂完全列** (almost split sequence) とは次の条件を満たすことである．

- f は左極小概分裂である．
- g は右極小概分裂である．

命題 4.14. $\mathrm{mod}(A)$ における短完全列を

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

とすると次は同値となる.

- 与えられた完全列が概分裂完全列である.
- L が直既約かつ g が右概分裂である.
- N が直既約かつ f が左外分裂である.
- f が左極小概分裂である.
- g が右極小概分裂である.
- L と N が直既約かつ f と g が既約写像である.

例 14. A を K 代数とする.

(1) 直既約射影加群 $P \in \mathrm{mod}(A)$ に対し，埋め込み写像 $\mathrm{rad}(P) \to P$ は既約写像となり，かつ右極小概分裂である.

(2) 双対として，直既約移入加群 $I \in \mathrm{mod}(A)$ に対し，自然な全射 $I \to \mathrm{soc}(I)$ は既約写像となり，かつ左極小概分裂である.

4.3 Auslander–Reiten 転移

この節では有限次元 A 加群の圏 $\mathrm{mod}(A)$ において，概分裂完全列が存在性について説明する.

初めに次の A 双対関手と呼ばれる次の関手を導入する.

$$(-)^t = \mathrm{Hom}_A(-, A) \colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$$

これを用いれば中山関手 ν は標準双対 $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ を用いて $\nu = D(-)^t$ で書くことができる．また，例えば，P_A が射影右 A 加群であるとすると $P^t = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ が射影左 A 加群になる．実際，$e \in A$ を原始的冪等元とすると，$P_A \cong eA$ であったから $P^t = \mathrm{Hom}_A(eA, A) \cong Ae$ となる．これは $(-)^t$ が加法的であることから従う．さらに，$z \in M$, $f \in M^t$ に対して, $\epsilon_M(z)(f) = f(z)$ により定義される準同型写像 $\epsilon_M \colon M \to M^{tt}$ は M 上で関手的であり，M が射影加群であるならば同型になる．したがって，$(-)^t$ は射影右 A 加群の圏 $\mathrm{proj}(A)$ と射影左 A 加群の圏 $\mathrm{proj}(A^{\mathrm{op}})$ との間に双対となる.

A 加群 M の極小射影表示

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

を考える．これは $p_0\colon P_0 \to M$ および $p_1\colon P_1 \to \mathrm{Ker}(p_0)$ が射影被覆となるような完全列である．これに関手 $(-)^t$ を適用すると, 次の左 A 加群の完全列

$$0 \to M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \to \mathrm{Coker}(p_1^t) \to 0$$

を得る．p_0^t，p_1^t は単にそれぞれの引き戻しである．また $\mathrm{Coker}(p_1^t) = P_1^t/\mathrm{Im}(p_1^t)$ である．この $\mathrm{Coker}(p_1^t)$ を M の**転置** (transpose) と呼び, 記号 $\mathrm{Tr}(M)$ で表す．射影被覆は同型を除き一意的に定まることから，極小射影表示も一意に定まるので，左 A 加群 $\mathrm{Tr}(M)$ も同型を除いて一意的に定まる．転置 Tr について次の性質が成り立つ．

命題 4.15. $\mathrm{mod}(A)$ に属する A 加群 M が直既約であるとすると次が成り立つ．

(1) 左 A 加群 $\mathrm{Tr}(M)$ は非零な射影加群の直和因子を持たない．

(2) M が射影加群でないとすると，M の極小射影表示 $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$ から誘導される系列

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \to \mathrm{Tr}(M) \to 0$$

は左 A 加群 $\mathrm{Tr}(M)$ の極小射影表示となる．

(3) M が射影加群であることと，$\mathrm{Tr}(M) = 0$ となることが同値となる．さらに，M が射影加群でないなら，$\mathrm{Tr}(M)$ は直既約かつ $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)) \cong M$ が成り立つ．

(4) M と N が直既約かつ射影加群でないなら．$M \cong N$ であることと $\mathrm{Tr}(M) \cong \mathrm{Tr}(N)$ が成り立つ．

二つの A 加群 M と N に対して射影加群を通過するすべての準同型で構成される部分空間 $\mathcal{P}(M,N) \subseteq \mathrm{Hom}_A(M,N)$ を考える．これは圏 $\mathrm{mod}(A)$ 上のイデアルを定義している．$f, f' \in \mathcal{P}(M,N)$ とすると f と f' はそれぞれ射影加群 P と P' をを通過するような準同型なので，$f = h \circ g$ と $f' = h' \circ g'$ と書ける．このとき，この二つの準同型の和は

$$f + f' = h \circ g + h' \circ g' = \begin{bmatrix} h & h' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}$$

となり，射影加群 $P \oplus P'$ を通過するような準同型に再び成る．一方で $\lambda \in K$ と $f \in \mathcal{P}(M,N)$ で $\lambda f \in \mathcal{P}(M,N)$ となる．さらに，$f \in \mathcal{P}(L,M)$ と $g \in \mathrm{Hom}A(M,N)$ については，$g \circ f \in \mathcal{P}(L,N)$ となり，同様に $f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ と $g \in \mathcal{P}(M,N)$ については，$g \circ f \in \mathcal{P}(L,N)$ となる．これで $\mathcal{P}$ が $\mathrm{mod}(A)$ のイデアルであることがわかる．圏として両側イデアルが手に入ったので，次の商圏を考えることができる．

$$\underline{\mathrm{mod}}(A) = \mathrm{mod}(A)/\mathcal{P}$$

これを，$\mathrm{mod}(A)$ の**射影安定圏** (projectively stable category) という．この圏の対象は $\mathrm{mod}(A)$ と同じである．$\underline{\mathrm{mod}}(A)$ における M から N への射の K 上ベクトル空間 $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)$ は $\mathrm{mod}(A)$ における合成から誘導される射の合成とともに，$\mathrm{Hom}_A(M,N)$ の商ベクトル空間

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$$

として定義する．また，この圏に対しては明らかに $\mathrm{mod}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A)$ なる関手が存在する．

これの双対として，二つの A 加群 M と N に対して移入加群を通過するすべての準同型で構成される部分空間 $\mathcal{I}(M,N) \subseteq \mathrm{Hom}_A(M,N)$ を考える．これも圏 $\mathrm{mod}(A)$ 上のイデアルを定義している．射影安定圏と同様に次の商圏を考えることができる．

$$\overline{\mathrm{mod}}(A) = \mathrm{mod}(A)/\mathcal{I}$$

これを，$\mathrm{mod}(A)$ の**移入安定圏** (injectively stable category) という．この圏の対象もまた $\mathrm{mod}(A)$ と同じである．$\overline{\mathrm{mod}}(A)$ における M から N への射の K 上ベクトル空間 $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)$ は $\mathrm{mod}(A)$ における合成から誘導される射の合成とともに，$\mathrm{Hom}_A(M,N)$ の商ベクトル空間

$$\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{I}(M,N)$$

として定義する．この圏に対しても明らかに $\mathrm{mod}(A) \to \overline{\mathrm{mod}}(A)$ なる関手が存在する．

A 加群 M から転置 $\mathrm{Tr}(M)$ への対応を考えたとき，これは $\mathrm{Tr}(M)$ が射影加群を消してしまうことから，$\mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ の間の双対とはならないが，商圏 $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ と $\underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}})$ の間の双対を定めている．そのことを次の命題で示そう．

命題 4.16. 対応 $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ は K 線形双対関手 $\mathrm{Tr}\colon \underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}})$ を誘導する．

証明. この双対を定める前に，$\underline{\mathrm{mod}}(A)$ の別な構造を商圏として与えていく．$\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ を A 加群 P_1, P_0 が射影加群で，射 $f\colon P_1 \to P_0$ が $\mathrm{mod}(A)$ の準同型であるような三つ組 (P_1, P_0, f) を対象とする圏とする．また，$f' \circ u_1 = u_0 \circ f$ を満たすような $u_1\colon P_1 \to P_1'$ と $u_0\colon P_0 \to P_0'$ の組 (u_1, u_0) として，この圏の射 $(P_1, P_0, f) \to (P_1', P_0', f')$ を定義する．すなわち，次の図式を可換にするような状況を考えている．

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_1"] & P_0 \arrow[d, "u_0"] \\
P_1' \arrow[r, "f'"] & P_0'
\end{tikzcd}$$

また, 圏 $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の二つの射 $(u_1, u_0)\colon (P_1, P_0, f) \to (P_1', P_0', f')$ と $(u_1', u_0')\colon (P_1', P_0', f') \to (P_1'', P_0'', f'')$ の合成は $(u_1', u_0')(u_1, u_0) = (u_1' \circ u_1, u_0' \circ u_0)$ として定義する．

ここで，関手 $F\colon \overrightarrow{\mathrm{proj}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A)$ を $(P_1, P_0, f) \to \mathrm{Coker}(f)$ で与えられる余核への関手 $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ と剰余類に対応させる関手 $\mathrm{mod}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A)$ の合成とする．また，$(u_1, u_0)\colon (P_1, P_0, f) \to (P_1', P_0', f')$ を $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の射とする．いま示したい主張は，$F(u_1, u_0) = 0$ となることと $f' \circ \omega \circ f = u_0 \circ f$ を満たすような $\omega\colon P_0 \to P_1'$ が存在することが同値となることである．これは次のような状況を考えている．

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_1"'] & P_0 \arrow[d, "u_0"] \arrow[dl, dashed, "\omega"'] \\
P_1' \arrow[r, "f'"] & P_0'
\end{tikzcd}$$

このような射 ω が存在していると仮定したとき，それぞれの余核とともに図式を描くと次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_1"'] & P_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u_0"] \arrow[dl, "\omega"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
P_1' \arrow[r, "f'"] & P_0' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{Coker}(f') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

各行は完全列になっていることに注意する．また，図中の射 u は u_1 と u_0 から誘導される射であり，g と g' は全射である．$f' \circ \omega \circ f = u_0 \circ f$ から $(u_0 - f' \circ \omega) \circ f = 0$ となるので，$u_0 - f' \circ \omega = v \circ g$ を満たすような射 $v\colon M \to P_0$ が存在する．しかしこのとき，$g' \circ v \circ g = g' \circ u_0 = u \circ g$ より $g' \circ v = u$ となる．したがって，u は射影加群 P_0' を経由しているので，$u \in \mathcal{P}(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Coker}(f'))$ であり，$F(u_1, u_0) = 0$ となる．逆に $F(u_1, u_0) = 0$ を仮定する．これは，各 f と f' の余核を経由することによって，u_1 と u_0 から誘導される射 u がある射影加群を経由して分解されるということである．g' が全射なので，これは $u = g' \circ v$ を満たすような $v\colon M \to P_0'$ が存在することを意味している．しかしこのとき，$g' \circ (u_0 - v \circ g) = g' \circ u_0 - g' \circ v \circ g = g' \circ u_0 - u \circ g = 0$ であり，$f' \circ \omega = u_0 - v \circ g$ を満たすような $\omega\colon P_0 \to P_1'$ が存在する．したがって，$f' \circ \omega \circ f = u_0 \circ f$ で主張が得られた．

これが意味するのは,$F(u_1, u_0) = 0$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ のイデアルを形成するような $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の射 (u_1, u_0) の類 $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ であることを言っている．これを確認する．$(u_1, u_0)\colon (P_1, P_0, f) \to (P_1', P_0', f')$ を $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ の射とし，$(v_1, v_0)\colon (P_1', P_0', f') \to (P_1'', P_0'', f'')$ を $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の任意の射とする．前の主張から，$f' \circ \omega \circ f = u_0 \circ f$

を満たすような射 $\omega\colon P_0 \to P'_1$ が存在する．しかしこのとき，$v_1 \circ \omega\colon P_0 \to P''_1$ が $f'' \circ (v_1 \circ \omega) \circ f = (f'' \circ v_1) \circ \omega \circ f = (v_0 \circ f') \circ \omega \circ f = (v_0 \circ u_0) \circ f$ を満たす．$(v_1 \circ u_1, v_0 \circ u_0)$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ に属する．同様に，(u_1, u_0) はそのままで，$(w_1, w_0)\colon (Q_1, Q_0, g) \to (P_1, P_0, f)$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の任意の射とすると $(u_1 \circ w_1, u_0 \circ w_0)$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ に属する．

以上のことから圏 $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ を法とした $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の商圏と同値となる．実際，M を $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ の対象としたとき $M = F(P_1, P_0, f)$ と書くことができる．このとき，$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ が M の極小射影表示となり，$M = F(P_1, P_0, f)$ と $M' = F(P'_1, P'_0, f')$ で $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ の射 $u\colon M \to M'$ が与えられれば，次の図式を可換にするような $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ の射 $(u_1, u_0)\colon (P_1, P_0, f) \to (P'_1, P'_0, f')$ が存在する．

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle u_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_0} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

よって，$u = F(u_1, u_0)$ となる．u が $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ で零であること，$F(u_1, u_0) = 0$ であることが同値となり，さらに (u_1, u_0) が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A)$ に属することが同値となる．これは次のような完全列を持つということを示している．

$$0 \to \overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A) \to \overrightarrow{\mathrm{proj}}(A) \xrightarrow{F} \underline{\mathrm{mod}}(A) \to 0$$

なお，いまここで示したいことは $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ なる対応によって双対 $\underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}})$ が誘導されることである．双対 $(-)^t\colon \mathrm{proj}(A) \xrightarrow{F} \mathrm{proj}(A^{\mathrm{op}})$ は明らかに $(P_1, P_0, f) \mapsto (P_0^t, P_1^t, f^t)$ のような対応によって，与えられる双対 $\overrightarrow{\mathrm{proj}}(A) \xrightarrow{F} \overrightarrow{\mathrm{proj}}(A^{\mathrm{op}})$ を誘導する．この双対も $(-)^t$ と表すことにする．ここで，$(-)^t$ の $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ への制限が双対 $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A) \to \overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A^{\mathrm{op}})$ を誘導することを主張する．よって，$(u_1, u_0)\colon (P_1, P_0, f) \to (P'_1, P'_0, f')$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ に属しているとし，$(u_1^t, u_0^t)\colon (P_0'^t, P_1'^t, f'^t) \to (P_0^t, P_1^t, f^t)$ が $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A)$ に属することを示す必要がある．過程より，$f' \circ \omega \circ f = u_0 \circ f$ を満たすような射 ω が存在しているので，$f^t \circ w^t \circ f'^t = f^t \circ u_0^t = u_1^t \circ f'^t$ となる．したがって，次のように各行が完全列であり，左側の四角が可換になるような次のような図式を得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A) & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{proj}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{mod}}(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (-)^t} & & \downarrow{\scriptstyle (-)^t} & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{proj}}_1(A^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{proj}}(A^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

この図式の右側の四角が可換になるように一意な関手 $\mathrm{Tr}\colon \underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}})$ を定義する．すなわち，$M = F(P_1, P_0, f)$ のとき，$\mathrm{Tr}(M) = F(P_0^t, P_1^t, f^t)$ とし，また，$\underline{\mathrm{mod}}(A)$ の射を $u\colon M \to M'$ とすれば，$M = F(P_1, P_0, f)$ と $M' = F(P_1', P_0', f')$ について．次の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
P_1' \arrow[r, "f'"] & P_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

これに関手 $(-)^t$ を適用することによって，次の図式が生成される．

$$\begin{tikzcd}
P_0^t \arrow[r, "f^t"] & P_1^t \arrow[r] & \mathrm{Tr}(M) \arrow[r] & 0 \\
P_0'^t \arrow[r, "f'^t"] \arrow[u, "u_0^t"] & P_1'^t \arrow[r] \arrow[u, "u_1^t"] & \mathrm{Tr}(M') \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

この図式は各行が完全列で左側の四角が可換になる．右側の四角が可換になるように作ることによって，$\mathrm{Tr}(u)\colon \mathrm{Tr}(M') \to \mathrm{Tr}(M)$ が一意な射となる．以上から，関手

$$\mathrm{Tr}\colon \underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}})$$

を定義することができ，これは実際に，双対となる． □

この双対 Tr のことを再び**転置**と呼ぶ．これは右 A 加群を左 A 加群に入れ替える反変関手となっている．したがって，$\mathrm{mod}(A)$ の自己同型関手を定義する際には，右 A 加群と左 A 加群の間で定義される別な双対関手によって合成をする必要がある．このような関手としては標準双対

$$D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$$

を用いる．

この二つの関手で，Auslander–Reiten 転移が定義できる．

定義 4.17. 標準双対 D と転置 Tr の合成によって定義する関手

$$\tau = D\mathrm{Tr}, \quad \tau^{-1} = \mathrm{Tr}D$$

を，**Auslander–Reiten 転移** (Auslander–Reiten translations) という．これをしばしば省略して AR 転移といったりする．この関手は次のような関係になっている．

$$\underline{\mathrm{mod}}(A) \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \overline{\mathrm{mod}}(A) \quad (= \overline{\mathrm{mod}}(A^{\mathrm{op}}))$$

上の定義は少々わかりずらいので，具体的に AR 転移が出てくる状況を考える．この節の最初の言及に戻り，極小射影表示と極小移入表示の状況を考えて，次は A 双対関手 $(-)^t$ だけでなく，さらに標準双対 D を適用する状況を考えよう．すなわち中山関手 $\nu = D(-)^t = D\mathrm{Hom}_A(-, A)\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ およびその擬逆 $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$ をそれぞれ適用することにより，結果として AR 転移 τ および τ^{-1} を適用した加群が結果として現れる．

最初に A 加群 M に対して，次の極小射影表示を考える．

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

したがって，$p_0\colon P_0 \to M$ および，$p_1\colon P_1 \to \mathrm{Ker}(p_0)$ が射影被覆となる．A 双対関手 $(-)^t$ から順番に適用すると，

$$0 \to M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \to \mathrm{Tr}(M) \to 0$$
$$0 \to D\mathrm{Tr}(M) \to DP_1^t \xrightarrow{Dp_1^t} DP_0^t \xrightarrow{Dp_0^t} DM^t \to 0$$

これを中山関手 $\nu = D(-)^t$ に置き換えれば，結果として次の完全列が得られる．

$$0 \to \tau M \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \to 0$$

このとき，完全列であることから $\tau M = \mathrm{Ker}(\nu p_1)$ となる．

次の極小移入分解を考える．

$$0 \to M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1$$

したがって，$i_0\colon M \to I_0$ および，$i_1\colon \mathrm{Coker}(i_0) \to I_1$ が移入包絡となる．標準双対 D から順番に適用すると，

$$DI_1 \xrightarrow{D(i_1)} DI_0 \xrightarrow{D(i_0)} DM \to 0$$
$$0 \to (DM)^t \xrightarrow{(D(i_0))^t} (DI_0)^t \xrightarrow{(D(i_1))^t} (DI_1)^t \to \mathrm{Tr}D(M) \to 0$$

となる．ここで，任意の A 加群 X について次の同型を得ることができる．

$$(DX)^t \cong \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(DX, A) \cong \mathrm{Hom}_A(DA, DDX) \cong \mathrm{Hom}_A(DA, X) \cong \nu^{-1}X$$

したがって，中山関手 ν^{-1} にそれぞれ置き換えれば，結果として次の完全列が得られる．

$$0 \to \nu^{-1}M \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} \nu^{-1}I_0 \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} \nu^{-1}I_1 \to \tau^{-1}M \to 0$$

このとき，$\tau^{-1}M = \mathrm{Coker}(\nu^{-1}i_1)$ となる．

注意 19. AR 転移に関して定義より明らかに $\tau M = 0$ のとき，M が射影加群となる．また $\tau^{-1}N = 0$ となるときは N が移入加群になる．

また，1 次の Ext 群との関連で Auslander–Reiten の公式と呼ばれる定理がある．証明は省くが詳しくは [ASS06] を参照すること．

定理 4.18 (Auslander–Reiten の公式)**.** M と N を A 加群とする．すると次の同型が存在する．

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M)$$

Auslander と Reiten によって示された概分裂完全列の存在性に関する重要な定理を紹介する．

定理 4.19 ([ASS06])**.** A を K 代数とする．次が成り立つ．

(1) 任意の射影加群でない直既約な加群 $M \in \mathrm{mod}(A)$ に対して，次の概分裂完全列が存在する．

$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0$$

(2) 任意の移入加群でない直規約な加群 $N \in \mathrm{mod}(A)$ に対して，次の概分裂完全列が存在する．

$$0 \to N \to E \to \tau^{-1}N \to 0$$

4.4 Auslander–Reiten クイバー

この章の最後に **Auslander–Reiten クイバー**を定義する．これは圏 $\mathrm{mod}(A)$ 上の情報を箙の形で表示したものになっていて．しばしば AR クイバーと呼ばれる．Krull–Schmidt の定理より任意の加群は順番と同型を除いて直既約な加群の直和に一意に書くことができた．AR クイバー上ではこの直規約な加群をそれぞれの頂点に置く．また，この直既約な加群の間の準同型ないしは矢印には既約写像を対応させることによって，$\mathrm{mod}(A)$ の情報を視覚的に表したものになる．AR クイバーを定義する前に，直既約加群の間の既約写像が何本必要かという情報必要である．

$M, N \in \mathrm{mod}(A)$ を直既約加群とする．A 加群準同型 $f\colon M \to N$ が既約写像となるのは $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ かつ $f \in \mathrm{rad}^2_A(M,N)$ となることと同値である．これにより，M から N への既約写像の数を計るために，ベクトル空間 $\mathrm{rad}_A(M,N)$ と $\mathrm{rad}^2_A(M,N)$ の商空間

$$\mathrm{Irr}(M,N) = \mathrm{rad}_A(M,N)/\mathrm{rad}^2_A(M,N)$$

を定義する．これを**既約写像空間** (space of irreducible morphisms) という．既約写像空間と極小概分裂写像との関係として次の命題を紹介する．

命題 4.20. A 加群 M が互いに非同型な直既約加群 M_i で $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i}$ となるとする．次が成り立つ．

(1) $L \in \mathrm{mod}(A)$ を直既約加群とし，$f\colon L \to M$ が

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}, \quad f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \to M_i^{n_i}$$

と表せるとする．このとき，f が左極小概分裂であることは，すべての i について，$f_{ij} \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ かつ $\mathrm{rad}_A^2(M, N)$ を法とする剰余類 $\overline{f_{i1}}, \dots, \overline{f_{in_i}}$ が $\mathrm{Irr}(L, M_i)$ の基底になることと，$\mathrm{Irr}(L, M') \neq 0$ なる直既約加群 $M' \in \mathrm{mod}(A)$ が存在するとき，$M' \cong M_i$ なる i が存在することと同値である．

(2) $N \in \mathrm{mod}(A)$ を直既約加群とし，$g\colon M \to N$ が

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_t \end{bmatrix}, \quad g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \to N$$

と表せるとする．このとき，g が右極小概分裂であることは，すべての i について $g_{ij} \in \mathrm{rad}_A(M_i, N)$ かつ $\mathrm{rad}_A^2(M_i, N)$ を法とする剰余類 $\overline{g_{i1}}, \dots, \overline{g_{in_i}}$ が $\mathrm{Irr}(M_i, N)$ の基底になることと，$\mathrm{Irr}(M', N) \neq 0$ なる直規約加群 $M' \in \mathrm{mod}(A)$ が存在するとき，$M' \cong M_i$ なる i が存在することと同値である．

この命題により，直既約加群の間の既約写像の個数は既約写像空間の n_i 個の基底で表わされるということである．さらに次の系も重要になる．

系 4.21. $L, N \in \mathrm{mod}(A)$ を直既約加群とする．このとき $\mathrm{mod}(A)$ の短完全列

$$0 \to L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \to 0$$

を考える．なお，M_i は互いに非同型な直既約加群とし，f と g はそれぞれ

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}, \quad f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \to M_i^{n_i}$$

および

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_t \end{bmatrix}, \quad g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \to N$$

と書けているとする．すると次が同値となる．

(1) この短完全列が概分裂完全列である．
(2) 各 i について，$f_{ij} \in \mathrm{rad}_A(L, M_i)$ であり $\mathrm{rad}_A^2(L, M_i)$ を法とするそれらの剰余類 $\overline{f}_{ij}$ が $\mathrm{Irr}(L, M_i)$ の基底となる．また，$\mathrm{Irr}(L, M') \neq 0$ なる直既約加群 M' が存在するとき，$M' \cong M_i$ となる i が存在する．
(3) 各 i について，$g_{ij} \in \mathrm{rad}_A(M_i, N)$ であり $\mathrm{rad}_A^2(M_i, N)$ を法とするそれらの剰余類 $\overline{g}_{ij}$ が $\mathrm{Irr}(M_i, N)$ の基底となる．また，$\mathrm{Irr}(M', N) \neq 0$ なる直既約加群 M' が存在するとき，$M' \cong M_i$ となる i が存在する．

これらのいずれか条件を満たすとき，すなわち，与えられた短完全列が概分裂完全列であるとき，各 i について，

$$n_i = \dim_K \mathrm{Irr}(L, M_i) = \dim_K \mathrm{Irr}(M_i, N)$$

が成り立つ．

以上より AR クイバーを定義する．

定義 4.22. 箙 $\Gamma(\mathrm{mod}(A))$ を以下で定義するとき，これを $\mathrm{mod}(A)$ の **Auslander-Reiten クイバー** (Auslander–Reiten quiver) ないしは **AR クイバー**と呼ぶ．

(1) 箙の頂点には直既約加群 $X \in \mathrm{mod}(A)$ の同型類 $[X]$ を対応させる．
(2) $[X]$，$[Y]$ を直既約加群 $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$ に対応する $\Gamma(\mathrm{mod}(A))$ の頂点とするとき，矢印 $[X] \to [Y]$ はベクトル空間 $\mathrm{Irr}(X, Y)$ の基底ベクトルの間で全単射な対応を持つ．すなわち，$[X]$ と $[Y]$ の間に矢印を $\dim \mathrm{Irr}(X, Y)$ 本引くことができる．

AR クイバー $\Gamma(\mathrm{mod}(A)$ について，頂点集合を Γ_0，矢印集合を Γ_1 とする．また，Γ_p を Γ_0 の部分集合ですべての直既約射影加群の同型類の集合とし，同様に Γ_i を Γ_0 の部分集合ですべての直既約移入加群の同型類の集合とする．各 $[N] \in \Gamma_0 \ \setminus \Gamma_p$ について，N の AR 転移 τN が存在し，$[\tau N] \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_i$ となる．これにより次で定義する全単射

$$\tau \colon \Gamma_0 \setminus \Gamma_p \to \Gamma_0 \setminus \Gamma_i$$

をまた τ で表示する．したがって射影加群でない各直既約加群 N について，$\tau[N] = [\tau N]$

を得る．また，これの逆は次で定義する全単射

$$\tau^{-1}\colon \Gamma_0 \setminus \Gamma_i \to \Gamma_0 \setminus \Gamma_p$$

で，移入加群でない各直既約加群 L について $\tau^{-1}[L] = [\tau^{-1}L]$ を得る．これは AR クイバー $\Gamma(\mathrm{mod}(A))$ の**転移** (translation) と呼ばれる．したがって，N が射影加群でない直既約加群とし，

$$0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$$

が互いに非同型な直規約加群 M_i と N で終わる概分裂完全列であるとすると．各 i について，

$$n_i = \dim_K \mathrm{Irr}(M_i, N) = \dim_K \mathrm{Irr}(\tau N, M_i)$$

を得る．

下記に AR クイバーの性質をまとめておく．

- ループを持たない．
- どの頂点間の矢印の本数も有限である．
- 射影加群でない $X \in \mathrm{mod}(A)$ に対して，$[\tau X]$ からある頂点 $[M]$ に向かう矢印の本数と $[M]$ から $[X]$ へ向かう矢印の本数が等しくなる．すなわち $\dim \mathrm{Irr}(\tau X, M) = \dim \mathrm{Irr}(M, X)$ が成り立つ．
- 移入加群でない $Y \in \mathrm{mod}(A)$ に対して，$[Y]$ からある頂点 $[M]$ に向かう矢印の本数と $[M]$ から $[\tau^{-1}Y]$ へ向かう矢印の本数は等しくなる．すなわち $\dim \mathrm{Irr}(Y, M) = \dim \mathrm{Irr}(M, \tau^{-1}Y)$ が成り立つ．
- 有限次元代数 A について，AR クイバー $\Gamma(\mathrm{mod}(A))$ が有限であることと A が有限表現型になることが同値となる．また，このとき AR クイバーは直既約加群の間に複数本の矢印を持たない，すなわち，任意の直既約加群 $M, N \in \mathrm{mod}(A)$ について $\dim \mathrm{Irr}(M, N) \leq 1$ となる．

以上より，AR クイバーは $\mathrm{mod}(A)$ 内の概分裂完全列を組み合わせてできた箙となることがわかる．したがって，$\mathrm{mod}(A)$ 内の直既約加群から概分裂完全列を作成すれば，AR クイバーを図示することができる．具体的に AR クイバーを描く際に必要な概分裂完全列に関する諸性質について次にまとめておく．これらの性質が成り立つことの証明は [ASS06] を参照してほしい．

射影加群と右極小概分裂に関する性質：

- $P \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約射影加群であるとき，$g\colon \mathrm{rad}(P) \to P$ が右極小概分裂であり，かつ g は単射になる．
- $X \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約加群であるとき，右極小概分裂 $g\colon M \to X$ が存在し，さらに $M = 0$ であることと X が単純射影加群であることが同値となる．
- $S \in \mathrm{mod}(A)$ が単純射影加群かつ移入加群でないとする．$f\colon S \to M$ が既約写像であるとき，M が射影加群となる．
- $M \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約加群かつ射影加群でないとき，既約写像 $f\colon X \to M$ が存在することと，既約写像 $f'\colon \tau M \to X$ が存在することが同値となる．

移入加群と左極小概分裂に関する性質：

- $I \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約移入加群であるとき，$f\colon I \to \mathrm{soc}(I)$ が左極小概分裂であり，かつ f は全射になる．
- $X \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約加群であるとき，左極小概分裂 $f\colon X \to M$ が存在し，さらに $M = 0$ であることと X が単純移入加群になることが同値である．
- $S \in \mathrm{mod}(A)$ が単純移入加群かつ射影加群でないとする．$g\colon M \to S$ が既約写像であるとき，M が移入加群となる．
- $N \in \mathrm{mod}(A)$ が直既約加群かつ移入加群でないとき，既約写像 $g\colon N \to Y$ が存在することと，既約写像 $g'\colon Y \to \tau^{-1}N$ が存在することが同値となる．

その他

- $X \in \mathrm{mod}(A)$ が単純加群でなく，射影加群かつ移入加群であるとする．すると次が概分裂完全列になる．

$$0 \to \mathrm{rad}(X) \to \mathrm{rad}(X)/\mathrm{soc}(X) \oplus X \to X/\mathrm{soc}(X) \to 0$$

注意 20. 定理 4.12 より，左極小概分裂と右極小概分裂はそれぞれ既約写像である．また，S を単純射影加群かつ移入加群でないとし，$f\colon S \to P$ を“左極小概分裂”とすると，上記の性質より P は射影加群になる．また，P の各直既約な因子 P' に対して，f の対応する成分 f’$\colon S \to P$’ は $\mathrm{rad}(P)$ の和を像とする単射準同型となる．したがって，P がそのようなすべての直既約射影加群 P' の直和であるとすると，系列

$$0 \to S \xrightarrow{f} P \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

が概分裂完全列になる．

以上の性質を用いて，AR クイバーを具体的に図示できる．以下に AR クイバーの例を紹介する．

例 15. (1): 次の箙 Q を考える．

$$Q = 1 \to 2 \to 3$$

$A = KQ$ とすると，これは有限表現型なので，直既約加群の同型類の完全系は有限集合になる．すべての直既約射影 A 加群と直既約移入 A 加群および単純加群はそれぞれ次の表現として与えられる．

$$\begin{aligned}
P(1)&\colon K \to K \to K = I(3)\\
P(2)&\colon 0 \to K \to K\\
P(3)&\colon 0 \to 0 \to K = S(3)\\
I(2)&\colon K \to K \to 0\\
I(1)&\colon K \to 0 \to 0 = S(1)\\
S(2)&\colon 0 \to K \to 0
\end{aligned}$$

このとき，$S(2)$ は射影加群でも移入加群でもない．さらに，次が成り立つことが簡単にわかる．

$$\begin{aligned}
P(2) &= \mathrm{rad}(P(1)) \quad P(3) = \mathrm{rad}(P(2))\\
I(1) &= I(2)/S(2) \quad I(2) = I(3)/S(3) = P(1)/S(3)
\end{aligned}$$

この直既約加群を用いて概分裂完全列を構成する．まず初めに $P(3)$ が単純射影加群かつ移入加群でないことが分かるので，$P(3)$ を始点とする既約写像は射影加群になる．$P(3) = \mathrm{rad}(P(2))$ および $P(3)$ が $\mathrm{rad}(P(1))$ の和の要素でないので，埋め込み写像 $i\colon P(3) \to P(2)$ が唯一の既約写像となり，かつ $P(2)$ を終点とする右極小概分裂となっている．したがって概分裂完全列として

$$0 \to P(3) \xrightarrow{i} P(2) \to \mathrm{Coker}(i) \to 0$$

を得る．また，$\mathrm{Coker}(i) = P(2)/P(1) = S(2)$ である．次に $P(2)$ について考えるがすでに $P(2) \to S(2)$ に既約写像が存在する．一方で $\mathrm{rad}(P(1)) = P(2)$ より，既約な埋め込み写像 $P(2) \to P(1)$ が存在する．ここで，$P(1) = I(3)$ よりこれは射影移入加群である．したがって，次の概分裂完全列が存在する．

$$0 \to P(2) \to P(1) \oplus S(2) \to I(2) \to 0$$

一方で，$I(2) \to I(2)/S(2) = I(1) = S(1)$ が $S(2)$ を核とする左極小概分裂になるので，次の概分裂完全列を得る．

$$0 \to S(2) \to I(2) \to S(1) \to 0$$

以上のデータを用いて AR クイバーを図示すると，

$$\begin{tikzcd}
 & & [P(1)] \arrow[dr] & & \\
 & [P(2)] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & [I(2)] \arrow[dr] & \\
[P(3)] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & [S(2)] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & [S(1)]
\end{tikzcd}$$

となる，またこの図の点線は転移の関係を表している．

5　特殊双列代数

この章を通して K は代数閉体，Q を有限な箙，I を道代数 KQ の許容イデアルとする．この章では有界箙代数 KQ/I に対し，箙 Q や許容イデアル I にいくつか制限をつけることによって得られる代数について概説する．例えば，すべての頂点 $v \in Q_0$ に対して，v を始点と終点とする矢印の数が高々一本という制限を考える．すると，KQ/I は monomial かつ有限表現型と呼ばれるものになる．この場合は，同型を除いて有限個の異なる直既約加群しか存在しないことが分かっている．また，代数 KQ/I について，I が長さ 2 以上の道で生成されているときこの代数は monomial であるという．このときの代数の表示はイデアル I の選び方に依存するが，一般には多くの異なるイデアル J で $KQ/I \cong KQ/J$ となる．

次に Q のすべての頂点に対して高々二本の始点と終点の矢印を持つという制限を考える．本論文の研究対象である対称 Kronecker 代数はまさにこのような箙になっている．この代数は特殊双列代数と呼ばれるものの一つである．次に定義する．

定義 5.1 ([S18])．有限次元 K 代数 A に対して，$A \cong KQ/I$ を満たすような，箙 Q と許容イデアル I での有界箙代数 KQ/I が存在して，これが次の条件を満たすとき A を**特殊双列代数** (Special biserial algebra) という．

(1) Q の各頂点 $v \in Q_0$ に対して，v を始点と終点とする矢印の数が高々二つである．

(2) Q の各矢印 $\alpha \in Q_1$ に対して，高々一つの矢印 $\beta \in Q_1$ が存在して，$\alpha\beta \notin I$ を満たす．かつ，高々一つの矢印 $\gamma \in Q_1$ が存在して $\gamma\alpha \notin I$ を満たす．

特殊双列代数に関して，この代数上の表現は順表現型に分類されるものとなる．したがって，直既約加群は 1 パラメータで分類されるような形をしている．この直既約加群は String，Band および直既約射影移入加群で分類される．

特殊双列代数は双列代数と呼ばれるものの一つであり，代数が**双列代数**であるとは次の定義で与えられるものである．

定義 5.2. 環 R 上の加群 M が**単列加群** (uniserial module) とは，それの部分加群が包含関係によって全順序であるときをいう．すなわち，M の任意の 2 つの部分加群 N_1, N_2 について，$N_1 \subseteq N_2$ または $N_2 \subseteq N_1$ である．

加群が単列加群の直和であれば，この加群を**直列加群** (serial module) という

定義 5.3. 代数 A が**双列代数** (biserial algebra) とは，A 上のすべての直既約射影左（または右）加群 P に $\mathrm{rad}(P) = U + V$ となる P の単列部分加群 U, V が存在して，$U \cap V$ がゼロまたは単純であるときをいう．

また**対称代数** (symmetric algebra) と呼ばれる代数についても簡単に紹介しておく．[S18]

定義 5.4. K 代数 A について，ベクトル空間の元からその係数体への線形形式 $f\colon A \to K$ が**対称** (symmetric) または**中心** (central) であるとは，任意の $a, b \in A$ について $f(ab) = f(ba)$ となるときをいう．

定義 5.5. 有限次元 K 代数 A が**対称代数** (symmetric) であるとは，対称な線形形式 $f\colon A \to K$ が存在して，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ に非零な A の左または右イデアルが含まれないときをいう．

対称代数 A は (A, A) 両側加群とみなすことができ，(A, A) 両側加群として，標準双対 D に A を適用した時のベクトル空間 $D(A) = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ と同型になる．次に対称代数のいくつかの例を示そう．

例 16. (1) K 代数 A が対称代数であるとき，その反転代数 A^{op} もまた対称代数となる．

(2) $\lambda \in K \setminus \{0\}$ について，代数 A を次で定義する．

$$A = K\langle X, Y\rangle / \{X^2, Y^2, XY - YX\}$$

ここで，$K\langle X, Y\rangle$ は K 上の非可換な二つの変数 X と Y による多項式代数であり，これは特に自由代数と呼ばれている．これも対称代数となっている．x と y をそれぞれ A における X と Y の剰余類とすると，A が 4 次元の局所代数となり，A の基底は $\{1_A, x, y, xy\}$ の形をしている．すなわち，$I = \{X^2, Y^2, XY - YX\}$ とすると，これらの基底は $1_A = 1_A + I$，$x = X + I$，$y = Y + I$，$xy = XY + I$ という形をしているということである．xy については

$$XY + YX - YX = YX + (XY - YX) = YX + I$$
$$YX + XY - XY = XY - (XY - YX) = XY + I$$

とそれぞれなるが，$XY = YX$ であるので，結局 $xy = XY + I = YX + I$ となる．また，$XYX = (XY - YX)X + YX^2$ および $YXY = (YX - XY)Y + XY^2$ となるので，同様な計算を繰り返せば A が 4 次元になっている．また，線形形式 $f\colon A \to K$ を $f(1_A) = 0$，$f(x) = 0$，$f(y) = 0$，$f(xy) = 1$ を満たすようにすれば，$f(I) \neq 0$ となり，また $f(xy) = f(yx)$ となるので，対称代数となる．

また，対称代数 A については，有限生成射影 A 加群 P を持ってくると，$\mathrm{soc}(P) \cong P/\mathrm{rad}(P)$ が成り立ち，また，特徴的な性質だが，この有限生成射影 A 加群は移入加群でもある．したがって，対称代数上の射影加群と移入加群は一致するということを抑えておくこと．

また，対称特殊双列代数は特に **Brauer graph 代数**と呼ばれている．すると，任意の特殊双列代数については次の事項が成り立つ．

定理 5.6. 任意の特殊双列代数は Brauer graph 代数の商となる．

本論文では特殊双列代数上の直既約加群である String 加群と Band 加群と呼ばれるものが計算できれば十分なので，上に挙げたいくつかの代数についての詳細は [S18] を見ること．

5.1 String 加群と Band 加群

この節では String 加群と Band 加群を定義する．これらの加群を具体的に構成する前にいくつか準備があるので，それらについて概説する．

箙 Q の各矢印 $\alpha \in Q_1$ に対して，ここではこの矢印の向きを反対にしたものを α^- と表すことにする．すなわち $s(\alpha^-) = t(\alpha)$ で，$t(\alpha^-) = s(\alpha)$ であり，特に $(\alpha^-)^- = \alpha$ である．この逆の矢印を集めた集合を $Q_1^- = \{\alpha^- \mid \alpha \in Q_1\}$ と表すことにする．また，Q の道 $w = u_1 u_2 \cdots u_n$ について，その逆の道を $w^- = u_n^- \cdots u_1^-$ で定義する．また頂点 i について，自明な道 ϵ_i は $s(\epsilon_i) = t(\epsilon_i) = i$ であるので，$\epsilon_i^- = \epsilon_i$ である．このとき，長さ n の歩道は $Q_1 \cup Q_1^-$ なる集合の元で組み合わさっていて，$u_i \in Q_1 \cup Q_1^-$ について $t(u_i) = s(u_{i+1})$ となる．2 つの道 $w_1 = u_1 \cdots u_n$ と $w_2 = v_1 \cdots v_m$ について，これらの積 $w_1 w_2$ は $t(w_1) = s(w_2)$ となるとき，

$$w_1 w_2 := u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$$

で定義する．また，歩道 w について $t(w) = s(w)$ となるとき，w を j 回連結させたものを w^j と書く．

定義 5.7. 歩道 $w = u_1 \cdots u_n$ が長さ n の **String** であるとは，次を満たすもである．

- 任意の $i = 1, 2, \ldots, n-1$ について，$u_{i+1} \neq u_i^-$
- 任意の $1 \leq i < i+k \leq n$ について，$u_{i+k} \cdots u_i$ も $u_i^- \cdots u_{i+k}^-$ も I に含まれない

長さ $n \geq 1$ の String b について，$t(b) = s(b)$ となるときこの string が**巡回**するという．これに加え，ある文字列 u を 1 回以上連結させた String $u \cdots u$ がいずれも b と等しくないなら，このとき巡回 String b は**原始的巡回** (primitive cyclic) と呼ばれる．

定義 5.8. 任意の $m \geq 1$ で $b^m \neq 0$ を満たすような原始的巡回 string $b = b_1 \cdots b_n$ で $b_1 \in Q_1^-$ かつ $b_n \in Q_1$ であるとき，string b を **Band** と呼ぶ．

以上より String 加群と Band 加群を次で定義する．

定義 5.9. $u = u_1 \cdots u_n$ を長さ n の String とする．はじめに，各頂点 $x \in Q_0$ に対し，次の集合を用意しておく，

$$\mathcal{I}_x := \{i \mid s(u_i) = x\} \cup \{n+1 \mid t(u_n) = x\}$$

このとき，A 上の **String 加群** $M(u)$ を次のように定義する．

- 各頂点 $x \in Q_0$ について，K 上ベクトル空間
$$M_x := \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_x} K_i$$
をとる．ここで，各 $i \in \mathcal{I}_X$ について，$K_i \cong K$ とする．

- $\alpha\colon x \to y$ となる各矢印 $\alpha \in Q_1$ で次の行列をとる

$$M_\alpha\colon \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_x} K_i \to \bigoplus_{j \in \mathcal{I}_y} K_j$$

このとき，この行列の要素は，

$$(M_\alpha)_{i,j} := \begin{cases} \mathrm{id}_K & (j = i+1,\ u_j = \alpha) \\ \mathrm{id}_K & (i = j+1,\ u_i = \alpha^-) \\ 0 \end{cases}$$

で定義する．

定義 5.10. $b = b_1 \cdots b_n$ を長さ n の Band とし，$M = (U, \Phi)$ を有限次元 $K[T, T^{-1}]$ 加群とする．ここで U は有限次元ベクトル空間であり，$\Phi\colon U \to U$ は可逆な線形自己準同型写像であって，T による作用に対応している．また，各頂点 $x \in Q_0$ に対して次の集合を用意しておく．

$$\mathcal{J}_x := \{i \mid s(u_i) = x\}$$

このとき，A 上の **Band** 加群 $B(b, M)$ を次のように定義する．

- 各頂点 $x \in Q_0$ について，K 状ベクトル空間

$$B_x := \bigoplus_{i \in \mathcal{J}_x} U_i$$

をとる．ここで，各 $j \in \mathcal{J}_x$ について，$U_i \cong U$ とする．

- $\alpha\colon x \to y$ となる各矢印 $\alpha \in Q_1$ で次の行列をとる．

$$B_\alpha : \bigoplus_{i \in \mathcal{J}_x} U_i \to \bigoplus_{j \in \mathcal{J}_y} U_j$$

このとき，この行列の要素は，

$$(B_\alpha)_{i,j} := \begin{cases} \mathrm{id}_U & (j = i+1,\ b_j = \alpha) \\ \mathrm{id}_U & (i = j+1,\ i \neq 1,\ b_i = \alpha^-) \\ \Phi & (i = 1,\ j = 2,\ b_1 = \alpha) \\ 0 \end{cases}$$

で定義する．

注意 21. 有限次元 $K[T,T^{-1}]$ 加群は，箙

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "T"] \end{tikzcd}$$

の表現になっており，線形写像が自己同型になっている．K が代数閉体なので，この加群の有限次元直既約表現は $M_{n,k} := (K^n, J_n(\lambda))$ の形をしていて，ここで $J_{n,\lambda}$ は n 次ジョルダン細胞である．また，このとき，$\lambda \in K \setminus \{0\}$ となる．

次章で加群の分解理論を構築するが，そのためにはすべての直既約加群の同型類の完全集合が必要になる．この章の最後に次の定理を紹介する．

定理 5.11 ([W85])**.** A を特殊双列代数とする．このとき，String 加群，Band 加群，すべての射影移入加群の非交和は有限次元直既約 A 加群の同型類の完全集合になる．

6 加群の分解理論

ここまでの話を簡単にまとめる．まず，ある代数の性質を調べたいときには代数上の加群ないしは表現を考えれば，線型代数の知識を使ってそれを具体的に計算することができた．第 3 章で紹介した箙と表現については，その箙 Q に対応する代数として Q の有界箙代数 KQ/I を構成し，箙の頂点にベクトル空間，箙の矢印に線型写像を置いたものを考えてこれをこの代数上の表現とした．この箙 Q の表現の圏と有限次元 K 代数 A 上の加群圏の間には圏同値の関係が存在している．したがって，ある有限次元代数の性質を調べるときには，各圏での振る舞いや性質を輸入することにより調べたい代数を研究することが可能になる．有限次元代数に限ると Krull-Schmidt の定理より，この代数上の有限生成加群は直既約な直和分解を持ち，その分解は順番と同型を除いて一意である．したがって，有限個の直既約加群の組み合わせによって任意の加群が構成されているなら，有限次元代数上の加群を研究する一つの目標として，それらの直既約加群をすべて分類できればよいだろう．また，これらの加群の間の加群準同型も同様にすべて列挙することができれば，よりこの代数上の加群について理解できるということになる．ここで，有限次元代数上の任意の加群は有限個の直既約な加群で構成されており，また準同型は和の形に分解すればよいから，重要なのは直既約な加群間の同型でない準同型を考えることである．直既約加群のときと同様，これ以上分解できないという性質を持ち，任意の準同型がその準同型の組み合わせで書けるという性質を持つものを考え，既約写像というのを考えた．この代数上の直既約加群と既約写像を概分裂完全列として組み合わせたものを考え，この概分

裂完全列を張り合わせて加群圏を構造的に表示したものが AR クイバーである．これについては 4 章の Auslander-Reiten 理論で説明した．この論文の目的は対称 Kronecker 代数上の加群について分解理論を構築することである．この分解理論を構築する際に直既約加群や AR クイバーなどのデータを利用することになる．以上より，分解理論について，これを構築する際に考える 2 つの問題についてのその概要を本章で説明する．

なおこの章は先行研究である [ANY17] に関する記述をまとめたものである．K を代数閉体，A を K 上の有限次元代数とし，$\mathcal{L}$ を直既約 A 加群の同型類の表現の完全集合とする．すると Krull-Schmidt の定理は次のように言っている．：各 A 加群 M に対して

$$M \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$$

が成り立つような一意な写像 $\boldsymbol{d}_M \colon \mathcal{L} \to \mathbb{N}_0$ が存在する．

A 加群 M と N が $M \cong N$ となるのは $\boldsymbol{d}_M = \boldsymbol{d}_N$ が成り立つのと同値である．したがって，$\boldsymbol{d}_M$ は A 加群 M の不変量になっている．写像 $\boldsymbol{d}_M$ は加群 M の中でその直既約加群がいくつ存在するかを表しているので $\boldsymbol{d}_M(L) = 0$ なら $L = 0$ となることに注意する．また，M が有限次元であるので，$\boldsymbol{d}_M$ の台 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{d}_M) := \{L \in \mathcal{L} \mid \boldsymbol{d}_M(L) \neq 0\}$ は有限集合となっている．このように，ある加群の直既約分解を“計算する”理論を加群の分解理論と呼ぶ．なので，考えたい A 上の加群に関しては，次の二つのデータが与えられていると仮定している．

- 直既約 A 加群の同型類の表現の完全集合 $\mathcal{L}$
- 概分裂完全列

したがって，分解理論を構築する際には AR クイバーの知識を用いて，すべての A 加群 M について次を計算できるようにするのが目標となる．

(I) 直既約加群の個数を計算する写像 $\boldsymbol{d}_M$
(II) $\operatorname{supp}(\boldsymbol{d}_M) \subseteq S_M \subseteq \mathcal{L}$ を満たす有限集合 S_M

(II) は有限アルゴリズムで計算できるようにするための条件である．なお，A が有限表現型，すなわち $\mathcal{L}$ が有限集合であるなら (II) は $S_M := \mathcal{L}$ となるので考える必要はない．次節および次章で紹介する Kronekcer 代数と対称 Kronecker 代数と呼ばれるものは順表現型に分類され，$\mathcal{L}$ が無限集合となる．したがって，有限なアルゴリズムを与えるために，集合 S_M を求める必要が生じる．したがって，有限表現型に分類されるもの以外は個別にその解法を与える必要がある．

6.1 直既約加群の個数

任意の代数 A について，問題 (I) は共通の理論によって導くことができる．その方法について概説していく．

定義 6.1. 直既約 A 加群 $L \in \mathcal{L}$ に対して，

$$\mathcal{S}_L := \mathrm{Hom}_A(L,-)/\mathrm{radHom}_A(L,-); \quad \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}K$$

なる関手のことを単純関手という．

補題 6.2. M を A 加群とする．すると M について，任意の直既約 A 加群 L の個数 $\boldsymbol{d}_M(L)$ は次で得られる．

$$\boldsymbol{d}_M(L) = \dim \mathcal{S}_L(M)$$

証明. L が直既約より，$\mathrm{End}_A(L)$ が局所代数となる．したがって，

$\mathcal{S}_L(L) = \mathrm{End}_A(L)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(L))$ が代数閉体 K 上の有限次元な斜体になる．ゆえに，$\mathcal{S}_L(L) \cong K$ であり，任意の直既約 A 加群 X について，$X \ncong L$ のとき，$\mathrm{End}_A(L) = \mathrm{radEnd}_A(L)$ で，$\mathcal{S}_L(X) = 0$ となる．すなわち，

$$\mathcal{S}_L(X) \cong \begin{cases} K & (X \cong L) \\ 0 & (X \ncong L) \end{cases}$$

となる．ゆえに M の直既約分解

$$M \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$$

に対して，単純関手は

$$\mathcal{S}_L(M) \cong K^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$$

として与えられるので，主張が示せた． □

命題 6.3. L を直既約 A 加群とする．

L が移入加群でないとき，L から始まる概分裂完全列は $J_L \subseteq \mathcal{L}$ と $a(X) \geq 1$ で

$$0 \to L \xrightarrow{f} \bigoplus_{X \in J_L} X^{(a(X))} \xrightarrow{g} \tau^{-1}L \to 0$$

となる．

L が移入加群であるとき，$f\colon L \to L/\mathrm{soc}(L) = \bigoplus_{X\in J_L} X^{(a(X))}$ は標準全射になる．（L が単純移入加群なら $J_L = \emptyset$ となる．）すると単純関手 $\mathcal{S}_L$ は極小射影分解を持ち，

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}L, -) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,-)} \bigoplus_{X\in J_L} \mathrm{Hom}_A(X,-)^{(a(x))} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,-)} \mathrm{Hom}_A(L,-) \xrightarrow{can} \mathcal{S}_L \to 0$$

となる．L が移入加群なら $g = 0$ かつ，$\tau^{-1}L = 0$ となる．

この補題と命題から次が従う．

定理 6.4. M を A 加群とする．任意の A 加群 L について，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{d}_M(L) = \dim \mathrm{Hom}_A(L, M) - \sum_{X\in J_L} a(X) \dim \mathrm{Hom}_A(X, M) + \dim \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}L, M)$$

証明.

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}L, -) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,-)} \bigoplus_{X\in J_L} \mathrm{Hom}_A(X,-)^{(a(x))} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,-)} \mathrm{Hom}_A(L,-) \xrightarrow{can} \mathcal{S}_L \to 0$$

について，この完全列を次のように対応させる．

$$0 \to U \to V \to W \to X \to 0$$

すなわち，$U = \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}L, -)$，$V = \bigoplus_{X\in J_L} \mathrm{Hom}_A(X,-)^{(a(x))}$, $W = \mathrm{Hom}_A(L,-)$, $X = \mathcal{S}_L$ と置く．各頂点はベクトル空間であることから，これらの間の線形写像について次元定理を考えると

$$\dim(X) - \dim(W) + \dim(V) - \dim(U) = 0$$

となり，したがって，

$$\dim(X) = \dim(W) - \dim(V) + \dim(U)$$

より成り立つ． □

箙 Q および道代数 KQ の許容イデアル I で K 代数が $A = KQ/I$ の形であるとするとき，この代数上の加群 $L, M \in \mathrm{mod}(A)$ について，$\mathrm{Hom}_A(L, M)$ は，L と M の表現 $(L(i), L(\alpha))_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ と $(M(i), M(\alpha))_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ を用いると，

$$\mathrm{Hom}_A(L, M) = \{(f_i)_{i\in Q_0} \mid M(\alpha)f_i = f_j L(\alpha),\ \alpha\colon i \to j \in Q_1\}$$

のような集合になっている．ここで，$M(\alpha)f_i - f_j L(\alpha) = 0$ となるような連立一次方程式を考えれば，次が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}_A(L, M) \cong \{\boldsymbol{x} \in K^N \mid B\boldsymbol{x} = 0\}$$

ここで，$N := \sum_{i\in Q_0} \dim L(i) \dim M(i)$，$c := \sum_{\alpha\colon i\to j\in Q_1} \dim M(j) \dim H(i)$ であり，B は各 f_i についての $c \times N$ の係数行列である．したがって，$\mathrm{Hom}_A(L,M)$ の次元は

$$\dim \mathrm{Hom}_A(L,M) = N - \mathrm{rank} B$$

で得ることができる．

6.2 Kronecker 代数上の加群における分解理論

先行研究 [ANY17] で紹介されていた Kronecker 代数上の加群における分解理論の構築およびその計算を紹介する．

Kronecker quiver と呼ばれる箙

$$Q\colon\ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$$

上の道代数を **Kronecker 代数**という．これは次で与えられる 2×2 行列と同型となる．

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & K^2 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

K^2 は (K,K) 両側加群であり，この代数の積演算は $d,c,f,e \in K$，$(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in K^2$ とすると，

$$\begin{pmatrix} d & (u_1,u_2) \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & (v_1,v_2) \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df & (dv_1+eu_1, dv_2+eu_2) \\ 0 & ce \end{pmatrix}$$

で与えられる．

Kronecker 代数 $A = KQ$ の表現 M を次で与える．

$$M\colon\ M(1) \underset{M(\beta)}{\overset{M(\alpha)}{\rightrightarrows}} M(2)$$

これの次元ベクトルを $\underline{\dim}(M) := (\dim M(1), \dim M(2))$ とし，$\underline{\dim}M = (d_1,d_2)$ と書いたときは，$i=1,2$ で $M(i) = K^{d_i}$，$M(\alpha), M(\beta) \in M_{d_2\times d_1}(K)$ となるよう定める．また，表現 M を行列の組 $(M(\alpha), M(\beta))$ として表すことにする．Kronecker 代数 A 上の直既約加群の同型類の完全集合 $\mathcal{L}$ は次で与えられる．

- 前射影加群 (preprojective module)：

$$\mathcal{P} := \left\{ P_n := \left(\begin{bmatrix} E_{n-1} \\ {}^t\mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{0} \\ E_{n-1} \end{bmatrix} \right) \middle|\ n \geq 1 \right\}$$

- 前移入加群 (preinjective module)：

$$\mathcal{I} := \left\{ I_n := \left(\begin{bmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E_{n-1} \end{bmatrix} \right) \middle| \; n \geq 1 \right\}$$

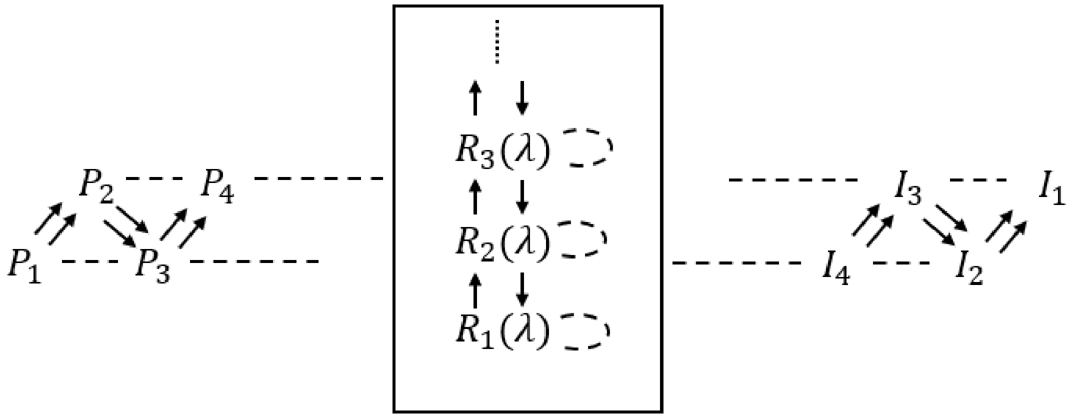
- 正則加群 (regular module)：

$$\mathcal{R} := \{ R_n(\lambda) := (E_n, J_n(\lambda)),\ R_n(\infty) := (J_n(0), E_n) \mid n \geq 1,\ \lambda \in K \}$$

ここで, $\mathbf{0}$ は $(n-1)\times 1$ の零ベクトルであり, $J_n(\lambda)$ は λ を固有値とする n 次ジョルダン細胞である．また，それぞれの直既約加群の次元ベクトルは $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{P}^1(K) = K \sqcup \{\infty\}$ として，次で与えられる．

$$\underline{\dim} P_n = (n-1, n),\ \underline{\dim} I_n = (n, n-1),\ \underline{\dim} R_n(\lambda) = (n, n)$$

また，AR クイバーは次のような形になる．(点線は AR 転移を表している．)



また，二つの直既約加群 $X, Y \in \mathcal{L}$ の間の既約写像について，$\mathrm{Hom}_A(X, Y) \neq 0$ となるとき，X が Y の左側であるという．これは次の状況を満たすときである．

- $X \cong P_m, Y \cong P_n, \quad (m \leq n)$
- $X \in \mathcal{P}, Y \in \mathcal{R} \cup \mathcal{I}$
- $X \cong R_m(\lambda), Y \cong R_n(\mu), \quad (\lambda = \mu)$
- $X \in \mathcal{R}, Y \in \mathcal{I}$
- $X \cong I_m, Y \cong I_n, \quad (m \geq n)$

また，$m \leq n$ のとき，$P_m \to P_n$ は単射であり，$I_n \to I_m$ は全射になる．

補足 9. 加群 X が前射影加群とは $i \geq 0$ について $\tau^i X = 0$ を満たすときをいう．X が直既約加群であるとすると射影加群 $P(j)$ が存在して，$X = \tau^{-r} P(j)$ となり，このとき，$r \geq 0$ と j は一意に決定された値になる．

また，同様に加群 X が前移入加群とは $i \geq 0$ について $\tau^{-i} X = 0$ を満たすときをいう．X が直既約加群であるとすると移入加群 $I(j)$ が存在して，$X = \tau^r I(j)$ となり，このとき，$r \geq 0$ と j は一意に決定された値になる．

また，ここで X が正則加群とはこの加群が前射影加群または前移入加群の和でないときをいう．

以上のデータを用いて Kronecker 代数 A 上の加群 M について，問題 (I) の解，すなわち $\boldsymbol{d}_M$ を求める．そのために直既約加群 L と任意の加群 M の間の表現の射 $f \colon L \to M$

とそれの次元を求める必要がある．例として前射影加群の場合を考え，$L = P_n$ としよう．図式としては次の状況を考えている．

$$
\begin{tikzcd}
P_n \arrow[dd, "f"'] & & K^{n-1} \arrow[r, shift left, "{\begin{bmatrix} E_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}}"] \arrow[r, shift right, "{\begin{bmatrix} 0 \\ E_{n-1} \end{bmatrix}}"'] \arrow[dd, "X"'] & K^n \arrow[dd, "Y"] \\
& & & \\
M & & K^{d_1} \arrow[r, shift left, "M(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "M(\beta)"'] & K^{d_2}
\end{tikzcd}
$$

これが可換になるように $f = (X, Y) \in \mathrm{Hom}_A(P_n, M)$ を求めればよい．すなわち，

$$
M(\alpha)X = Y \begin{bmatrix} E_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M(\beta)X = Y \begin{bmatrix} 0 \\ E_{n-1} \end{bmatrix}
$$

として，X の列行列を X_i，$(i = 1, \ldots, n-1)$，Y の列行列を Y_i，$(i = 1, \ldots, n)$ とすれば，方程式として

$$
\begin{aligned}
M(\alpha)X_1 - Y_1 &= 0 \\
M(\alpha)X_2 - Y_2 &= 0 \\
&\vdots \\
M(\alpha)X_{n-1} - Y_{n-1} &= 0 \\
M(\beta)X_1 - Y_2 &= 0 \\
M(\beta)X_2 - Y_3 &= 0 \\
&\vdots \\
M(\beta)X_{n-1} - Y_n &= 0
\end{aligned}
$$

が導出でき，各 X_i，Y_i を変数として次の行列を用いた形に書き直すことができる．

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
M(\alpha) & & & & -E_{d_2} & & & & 0 \\
& M(\alpha) & & & & -E_{d_2} & & & 0 \\
& & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & M(\alpha) & & & & -E_{d_2} & 0 \\
\hline
M(\beta) & & & & 0 & -E_{d_2} & & & \\
& M(\beta) & & & 0 & & -E_{d_2} & & \\
& & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\
& & & M(\beta) & 0 & & & & -E_{d_2}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = 0
$$

この方程式の係数行列を B とおけば，$\dim \mathrm{Hom}_A(P_n, M) = (n-1)d_1 + nd_2 - \mathrm{rank} B$ で $\mathrm{Hom}_A(P_n, M)$ の次元を求めることができる．しかし，この状態だと計算が複雑なので，B について，行および列基本変形を用いることによって階数標準形に変形する．すると，規則を持った行列

$$P_n(M) := \begin{bmatrix} M(\beta) & M(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\beta) & M(\alpha) & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & M(\beta) & M(\alpha) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M(\beta) & M(\alpha) \end{bmatrix}$$

が導出でき，$B \cong P_{n-1} \oplus E_{nd_2}$ となることが分かる．ここで，P_n のランクを

$$p_1(M) := 0,\ p_n(M) := \mathrm{rank} P_n(M) \quad (n \geq 2)$$

のように置けば，$\mathrm{rank} B = nd_2 + p_{n-1}(M)$ となるので，

$$\dim \mathrm{Hom}_A(P_n, M) = (n-1)d_1 - p_{n-1}(M)$$

と書ける．前移入加群，正則加群の場合も同様に計算できる．これらの結果をまとめて次に定義する．

定義 6.5. M を A 加群とする．$n \geq 1$，$\lambda \in K$ とし次の行列を定義する．

$$P_n(M) := \begin{bmatrix} M(\beta) & M(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\beta) & M(\alpha) & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & M(\beta) & M(\alpha) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M(\beta) & M(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$I_n(M) := \begin{bmatrix} M(\beta) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M(\alpha) & M(\beta) & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & M(\alpha) & M(\beta) & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M(\alpha) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & M(\beta) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_n(\lambda, M) := \begin{bmatrix} M_\lambda(\alpha,\beta) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M(\alpha) & M_\lambda(\alpha,\beta) & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & M(\alpha) & M_\lambda(\alpha,\beta) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M(\alpha) & M_\lambda(\alpha,\beta) \end{bmatrix}$$

$$R_n(\infty, M) := \begin{bmatrix} M(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -M(\beta) & M(\alpha) & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -M(\beta) & M(\alpha) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -M(\beta) & M(\alpha) \end{bmatrix}$$

ここで，$J_{0,1}$ は 0×1 の空行列として，$P_1(M) = J_{0,1}$ と定義する．また，$M_\lambda(\alpha,\beta) = \lambda M(\alpha) - M(\beta)$ と置く．また，それぞれのランクを次のように置いておく．

$$p_1(M) := 0,\ p_n(M) := \mathrm{rank} P_n(M) \quad (n \geq 2)$$
$$i_0(M) := 0,\ i_n(M) := \mathrm{rank} I_n(M) \quad (n \geq 1)$$
$$r_n(\lambda, M) := \mathrm{rank} R_n(\lambda, M) \quad (n \geq 1,\ \lambda \in \mathbb{P}^1(K))$$

これらのデータを用いて，$\boldsymbol{d}_M$ が計算できる．定理として次に示しておく．

定理 6.6. M を A 加群とする．次が成り立つ．

$$\boldsymbol{d}_M(P_n) = \begin{cases} 2p_n(M) - p_{n-1}(M) - p_{n+1}(M) & (n \geq 2) \\ d_2 - p_2(M) & (n = 1) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{d}_M(I_n) = \begin{cases} 2i_{n-1}(M) - i_n(M) - i_{n-2}(M) & (n \geq 2) \\ d_1 - i_1(M) & (n = 1) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{d}_M(R_n(\lambda)) = \begin{cases} r_{n-1}(\lambda, M) + r_{n+1}(\lambda, M) - 2r_n(\lambda, M) & (n \geq 2) \\ r_2(\lambda, M) - 2r_1(\lambda, M) & (n = 1) \end{cases}$$

以上で Kronecker 代数上の加群における問題 (I) の解法が得られた．次章で対称 Kronekcer 代数についても同様の手順で問題 (I) が解けることを示す．

次に Kronecker 代数上の加群について，問題 (II) を解く．Kronecker 代数上の表現は順表現型とよばれるものの一つであり，各直既役加群は 1 パラメータで記述され，無限に存在する．したがって，直既約加群の同型類の表現の完全集合 L は無限集合となっていた．Kronecker 代数上のある加群について，先ほど求めた $\boldsymbol{d}_M$ を適用したいが，すべて

の直既約加群のパターンを調べるのは不可能である．したがって，与えられた加群に対し構成されている直既約加群の範囲を決めれば，これについて有限のアルゴリズムが得られる．これは冒頭で説明した通り，$\mathrm{supp}(\boldsymbol{d}_M) \subseteq S_M \subseteq \mathcal{L}$ を満たすような有限集合 S_M のことである．

これを求めるアイデアは単純で，調べる Kronecker 代数上の加群 M の次元を用いて S_M の集合を決めることができる．これについて解説しよう．はじめに次の同型写像を定める．

$$F\colon \bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))} \to M$$

このとき，$\mathcal{L} = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{R} \sqcup \mathcal{I}$ となっている．このとき，$\bigoplus_{L\in\mathcal{P}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$ の F による像を P_M と書き，同様に前移入加群と正則加群についても同様に I_M と R_M とする．この F によって移された像により，任意の A 加群 M は次の形で書くことができる．

$$M = P_M \oplus R_M \oplus I_M$$

したがって，このときの P_M，R_M，I_M を計算することができればよい．これの計算には **Trace** および **Reject** と呼ばれるものを用いる．

$\mathcal{U}$ を $\mathrm{mod}(A)$ における加群の類とし，$M \in \mathcal{U}$ とする．このとき，$\mathcal{U}$ の M での Trace と Reject は記号でそれぞれ $\mathrm{Tr}_M(\mathcal{U})$，$\mathrm{Rej}_M(\mathcal{U})$ と表され，次で定義するものである．

$$\mathrm{Tr}_M(\mathcal{U}) := \sum\{\mathrm{Im}(f) \mid f \in \mathrm{Hom}_A(U,M),\ U \in \mathcal{U}\}$$
$$\mathrm{Rej}_M(\mathcal{U}) := \bigcap\{\mathrm{Ker}(f) \mid f \in \mathrm{Hom}_A(M,U),\ U \in \mathcal{U}\}$$

ここで, $\mathcal{U} = \{U\}$ が単集合であるときは $\mathrm{Tr}_M(U) := \mathrm{Tr}_M(\mathcal{U})$ と $\mathrm{Rej}_M(U) := \mathrm{Rej}_M(\mathcal{U})$ とする．また，これらについて次が成り立つ．

補題 6.7. 集合 I によって添字付けられた A 加群の族を $(M_i)_{i\in I}$ とし，$\mathcal{U}$ を $\mathrm{mod}(A)$ の加群の類とする．すると次を得る．

$$\mathrm{Tr}_{\oplus_{i\in I} M_i}(\mathcal{U}) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tr}_{M_i}(\mathcal{U}), \quad \mathrm{Rej}_{\oplus_{i\in I} M_i}(\mathcal{U}) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Rej}_{M_i}(\mathcal{U})$$

命題 6.8. $\{f_1, \ldots, f_a\}$ を $\mathrm{Hom}_A(M, P_{d_2})$ の基底とすると，次が成り立つ．

$$\bigcap_{i=1}^{a} \mathrm{Ker}(f_i) = R_M \oplus I_M, \quad P_M \cong M/\left(\bigcap_{i=1}^{a} \mathrm{Ker}(f_i)\right)$$

証明. 仮定から $\bigcap_{i=1}^{a} \mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Rej}_M(P_{d_2})$ なので,

$$\mathrm{Rej}_M(P_{d_2}) = R_M \oplus I_M$$

を示せばよい．今，$M = P_M \oplus R_M \oplus I_M$ となっているので，補題 6.7 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rej}_M(P_{d_2}) &= \mathrm{Rej}_{P_M \oplus R_M \oplus I_M}(P_{d_2}) \\ &= \mathrm{Rej}_{P_M}(P_{d_2}) \oplus \mathrm{Rej}_{R_M}(P_{d_2}) \oplus \mathrm{Rej}_{I_M}(P_{d_2})\end{aligned}$$

を得られる．ここで，$\mathrm{Hom}_A(R_M, P_{d_2}) = 0$ と $\mathrm{Hom}_A(I_M, P_{d_2}) = 0$ より,

$$\mathrm{Rej}_{R_M}(P_{d_2}) = R_M, \quad \mathrm{Rej}_{I_M}(P_{d_2}) = I_M$$

となる．ここで，直規約前射影加群 P_i が M の直和因子であるとする．それぞれの射影加群の次元ベクトルは $\underline{\dim}(P_i) = (i-1, i)$ となっており，また，M の次元ベクトルは，$\underline{\dim}(M) = (d_1, d_2)$ となっている．$\underline{\dim}(P_i) \leq \underline{\dim}(M)$ となるので，$i \leq d_2$ となる．ゆえに，ある $a_i \geq 0$ が存在して，$P_M = \bigoplus_{i=1}^{d_2} P_i^{(a_i)}$ となる．また，$\mathrm{Rej}_{P_M}(P_{d_2}) = \bigoplus_{i=1}^{d_2} (\mathrm{Rej}_{P_i}(P_{d_2}))^{(a_i)}$ となる．$i \leq d_2$ であるので，$P_i \to P_{d_2}$ は単射になる．したがって，単射であるならば核は 0 になるので，任意の $i \leq d_2$ について $\mathrm{Rej}_{P_i}(P_{d_2}) = 0$ となる．ゆえに,

$$\mathrm{Rej}_{P_M}(P_{d_2}) = 0$$

となる．よって示された. □

命題 6.9. $\{g_1, \ldots, g_b\}$ を $\mathrm{Hom}_A(I_{d_1}, R_M \oplus I_M)$ の基底とすると，次が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{b} \mathrm{Im}(g_i) = I_M$$

証明. $\mathcal{I} \to \mathcal{R}$ への射は存在しないから，明らかに $\sum_{i=1}^{b} \mathrm{Im}(g_i) = \mathrm{Tr}_{R_M \oplus I_M}(I_{d_1})$ となる．したがって,

$$\mathrm{Tr}_{R_M \oplus I_M}(I_{d_1}) = I_M$$

を示せばよい．補題 6.7 より,

$$\mathrm{Tr}_{R_M \oplus I_M}(I_{d_1}) = \mathrm{Tr}_{R_M}(I_{d_1}) \oplus \mathrm{Tr}_{I_M}(I_{d_1})$$

を得る．$\mathrm{Hom}_A(I_{d_1}, R_M) = 0$ となるので，$\mathrm{Tr}_{R_M}(I_{d_1}) = 0$ となる．ここで，直既役前移入加群 I_i が M の直和因子であるとする．それぞれの移入加群の次元ベクトルは $\underline{\dim}(I_i) = (i, i-1)$ となっており，また，M の次元ベクトルは $\underline{\dim}(d_1, d_2)$ となって

いる．$\underline{\dim}(I_i) \leq \underline{\dim}(M)$ となるので，$i \leq d_1$ となる．ゆえに, ある $b_i \geq 0$ が存在して，$I_M = \bigoplus_{i=1}^{d_1} I_i^{(b_i)}$ となる．また，$\mathrm{Tr}_{I_M}(I_{d_1}) = \bigoplus_{i=1}^{d_1}(\mathrm{Tr}_{I_i}(I_{d_1}))^{(b_i)}$ となる．ここで，$i \leq d_1$ であるので，$I_{d_1} \to I_i$ は全射になる．したがって，任意の $i \leq d_1$ について $\mathrm{Tr}_{I_{d_i}}(I_{d_1}) = I_i$ となる．ゆえに,

$$\mathrm{Tr}_{I_M}(I_{d_1}) = I_M$$

となる．よって示された. □

命題 6.8 と命題 6.9 より次が従う．

命題 6.10. $\{f_1, \ldots, f_a\}$ を $\mathrm{Hom}_A(M, P_{d_2})$ の基底とし, $\{g_1, \ldots, g_b\}$ を $\mathrm{Hom}_A(I_{d_1}, \bigcap_{i=1}^{a} \mathrm{Ker}(f_i))$ の基底とすると次を得る．

$$R_M \cong \left(\bigcap_{i=1}^{a} \mathrm{Ker}(f_i)\right) / \left(\sum_{i=1}^{b} \mathrm{Im}(g_i)\right)$$

この同型により R_M を特定できる．$R_M = (R_M(\alpha 9, R_M(\beta)$ は直既役正則加群の直和であり，$R_M(\alpha)$ と $R_M(\beta)$ はサイズが d の正方行列になる．また，$R(\infty) := \mathrm{Tr}_{R_M}(R_d(\infty))$ と置くと，$n \geq m$ について，$R_n(\infty) \to R_m(\infty)$ が全射になるので，$\mathrm{Tr}_{R_M}(R_d(\infty)) = \mathrm{Tr}_{R_M}(\bigoplus_{n=1}^{d} R_n(\infty)$ となることに注意する．ゆえに R' が任意の n について $R_n(\infty)$ の形の直和を持たないような R_M の部分加群 $R' = (X', Y')$ について，$R_M = R(\infty) \oplus R'$ となる．$\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$，$n \geq 1$ で R_M は $R_n(\lambda)$ の形の直既役に分解される．ゆえに $R(\infty)$ の形の和の直和によって $R(\infty)$ が与えられるので，$\lambda = \infty$ で $R_n(\lambda)$ の形の直和の直和によって R' が与えられる．この R' もまた，$R' = \mathrm{Rej}_{R_M}(R_d(\infty))$ によって計算される．今行列 X' は可逆なので，$l \leq d$ について

$$R' \cong (E_l, (X')^{-1}Y')$$

を得る．ゆえに，$(X')^{-1}Y'$ の固有値の集合 Λ は有限になる．

以上より，Kronecker 代数における問題 (II) は

$$S_M := \{P_i, I_j, R_k(\lambda) \mid 1 \leq i \leq d_2,\ 1 \leq j \leq d_1,\ 1 \leq k \leq d, \lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}\}$$

によって与えられた．

7 対称 Kronecker 代数上の加群における分解理論

この章を通して K は代数閉体とする．

本研究では分解理論の問題 (I) および問題 (II) を対称 Kronecker 代数とよばれる代数上の加群を対象として調べた．特に問題 (I) については完全な解法を得ることができ，コンピュータプログラムも作成した．なお，問題 (II) については完全な解法を得ることができなかったが，前章で紹介した Kronekcer 代数と対称 Kronecker 代数が安定同値という関係があり，この関係を利用した考察を載せておく．

対称 Kronecker 代数 (Symmetric Kronecker algebra) は次の箙 Q および関係式で与えられる有界箙代数である．これは対称代数であり，かつ特殊双列代数になっている．

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}; \quad \alpha^2 = \beta^2 = 0,\ \alpha\beta - \beta\alpha = 0$$

なお，この箙に関係式を入れない場合，道代数 KQ は無限個の道

$$\{e_1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^3, \beta^3, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta^2, \beta\alpha\beta, \beta\alpha^2, \dots\}$$

を基底として生成されている．これが，関係式 $\rho = \{\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta - \beta\alpha\}$ で生成される許容イデアル $I = \langle\rho\rangle$ を定めることで，対称 Kronecker 代数 $A = KQ/I$ は

$$\{\overline{e_1}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\alpha\beta}\}, \quad \overline{e_1} = e_1 + I,\ \overline{\alpha} = \alpha + I,\ \overline{\beta} = \beta + I,\ \overline{\alpha\beta} = \alpha\beta + I$$

を基底として生成される有界箙代数になる．すると d 次元の A 加群 M の表現は

$$M = \begin{tikzcd} K^d \arrow[loop left, "M_\alpha"] \arrow[loop right, "M_\beta"] \end{tikzcd}$$

の形で書くことができる．ここで，M_α と M_β はサイズが d の正方行列であり，このベクトル空間上に作用する線形写像の表現行列である．また，この代数の関係式から $M_\alpha^2 = 0$, $M_\beta^2 = 0$，$M_\beta M_\alpha - M_\alpha M_\beta = 0$ となるような行列である．

対象 Kronecker 代数は対称特殊双列代数の一つであるのでこの代数上の加群は直既約射影移入加群，String 加群，Band 加群の 3 つに分類される．さらに，順表現型であるため，直既約加群の同型類の個数は無限個存在する．なお，対称 Kronecker 代数上の直既約射影移入加群の同型類は一意であり 1 個だけである．

この代数の直規約加群の同型類を次に示す．ここで，$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$n \geq 1$，$\lambda \in \mathbb{P}^1(K) = K \sqcup \{\infty\}$ とする．また，$\mathbf{0}_n$ を $1 \times n$ の零ベクトル，$O_{m,n}$ は $m \times n$ 零行列，E_m は m 次単位行列，$J_n(\lambda)$ は λ を固有値とする n 次ジョルダン細胞であるとする．

- 一意な直既約射影移入加群 $\overline{A}$： $\dim \overline{A} = 4$

$$\overline{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- String 加群 $M(m) := M((\alpha^- \beta)^m)$：$\dim M(m) = 2m+1$

$$M(m)_\alpha = \left[\begin{array}{c|c} O_m & O_{m,m+1} \\ \hline E_m & O_{m,m+1} \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_{m+1} \end{array}\right], \quad M(m)_\beta = \left[\begin{array}{c|c} O_m & O_{m,m+1} \\ \hline \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_{m+1} \\ E_m & O_{m,m+1} \end{array}\right]$$

- String 加群 $M(-m) := M((\alpha\beta^-)^m)$：$\dim M(-m) = 2m+1$

$$M(-m)_\alpha = \left[\begin{array}{cc|c} O_{m+1,m} & {}^t\mathbf{0}_{m+1} & O_{m+1,m} \\ \hline E_m & {}^t\mathbf{0}_m & O_{m+1,m} \end{array}\right],$$

$$M(-m)_\beta = \left[\begin{array}{cc|c} {}^t\mathbf{0}_{m+1} & O_{m+1,m} & O_{m+1,m} \\ \hline {}^t\mathbf{0}_m & E_m & O_m \end{array}\right]$$

- String 加群 $M(0)_n := M((\alpha\beta^-)^{n-1}\alpha)$：$\dim M(0)_n = 2n$

$$M(0)_{n,\alpha} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline E_n & O_n \end{array}\right], M(0)_{n,\beta} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline J_n(0) & O_n \end{array}\right]$$

- String 加群 $M(\infty)_n := M(\beta(\alpha^-\beta)^{n-1})$：$\dim M(\infty)_n = 2n$

$$M(\infty)_{n,\alpha} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline J_n(0) & O_n \end{array}\right], M(\infty)_{n,\beta} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline E_n & O_n \end{array}\right]$$

- Band 加群 $M(\lambda)_n := B(\beta^-\alpha, V)$：$\dim M(\lambda)_n = 2n$

$$M(\lambda)_{n,\alpha} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline E_n & O_n \end{array}\right], M(\lambda)_{n,\beta} = \left[\begin{array}{c|c} O_n & O_n \\ \hline J_n(\lambda) & O_n \end{array}\right]$$

  ここで V は有限次元 $K[x, x^{-1}]$ 加群であり，V の基底に関して $x \mapsto J_n(\lambda)$ なる対応によって V を表す．

これらの直既約加群を合わせて A 上の有限次元直既約加群の同型類の完全系 $\mathcal{L}$ が得られる．加群をまとめて次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(m) &:= \{M(m) \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{M}(\lambda) &:= \{M(\lambda)_n \mid \lambda \in \mathbb{P}^1(K),\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \\ \mathcal{A} &:= \{\overline{A}\} \\ \mathcal{L} &:= \mathcal{M}(m) \sqcup \mathcal{M}(\lambda) \sqcup \mathcal{A} \end{aligned}$$

また，$\mathrm{mod}(A)$ における概分裂完全列は次で与えられる．

$$
\begin{gathered}
0 \to M(-1) \to \overline{A} \oplus M(0) \oplus M(0) \to M(1) \to 0 \\
0 \to M(n-1) \to M(n) \oplus M(n) \to M(n+1) \to 0 \quad (n \neq 0) \\
0 \to M(\lambda)_1 \to M(\lambda)_2 \to M(\lambda)_1 \to 0 \quad (\lambda \in \mathbb{P}^1 K) \\
0 \to M(\lambda)_n \to M(\lambda)_{n-1} \oplus M(\lambda)_{n+1} \to M(\lambda)_n \to 0 \quad (n > 1,\ \lambda \in \mathbb{P}^1(K))
\end{gathered}
$$

よってこの代数の AR クイバーは次のような形になる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & M(-2) \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & M(0) \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & M(2) \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \cdots \\
\cdots & M(-3) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & M(-1) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dr] & & M(1) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & M(3) & \\
 & & & & \overline{A} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \\
M(\lambda)_4 \arrow[d, shift left] \\
M(\lambda)_3 \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] \\
M(\lambda)_2 \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] \\
M(\lambda)_1 \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

7.1 問題 (I)

対称 Kronecker 代数上の加群について問題 (I) を解く．直既約加群を L，任意の加群を M として，次の図式をもとに L にそれぞれの直既約加群を当てはめて計算していく．初めに $L = M(m)$ として，次の図の状況を考える．M の次元は d とする．

$$
\begin{tikzcd}
M(m) = \quad M(m)_\alpha \circlearrowright & K^{2m+1} \arrow[d, "X"] & \circlearrowleft M(m)_\beta \\
M = \quad M_\alpha \circlearrowright & K^d & \circlearrowleft M_\beta
\end{tikzcd}
$$

このときこの図式が可換になるように X を求めればよい．X の列行列を X_i，$(i = 1, \ldots, 2m+1)$ とすると次が成り立つ．

$$
M_\alpha(X_1, \ldots, X_{2m+1}) = (X_1, \ldots, X_{2m+1}) \left[\begin{array}{c|c} O_m & O_{m,m+1} \\ \hline E_m & O_{m,m+1} \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_{m+1} \end{array} \right]
$$

$$
M_\beta(X_1, \ldots, X_{2m+1}) = (X_1, \ldots, X_{2m+1}) \left[\begin{array}{c|c} O_m & O_{m,m+1} \\ \hline \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_{m+1} \\ E_m & O_{m,m+1} \end{array} \right]
$$

これから，次の連立方程式が導出できる．

$$
\begin{array}{cc}
M_\alpha X_1 = X_{m+1} & M_\beta X_1 = X_{m+2} \\
M_\alpha X_2 = X_{m+2} & M_\beta X_2 = X_{m+3} \\
\vdots & \vdots \\
M_\alpha X_m = X_{2m} & M_\beta X_m = X_{2m+1} \\
M_\alpha X_{m+1} = 0 & M_\beta X_{m+1} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
M_\alpha X_{2m+1} = 0 & M_\beta X_{2m+1} = 0
\end{array}
$$

これを各 X_i を変数として，次の行列を用いた形に書き直すことができる．

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
M_\alpha & & & & -E_d & & & & 0 \\
& M_\alpha & & & & -E_d & & & 0 \\
& & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & M_\alpha & & & & -E_d & 0 \\
\hline
& & & & M_\alpha & & & & \\
& & & & & M_\alpha & & & \\
& \text{O} & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & M_\alpha & \\
& & & & & & & & M_\alpha \\
\hline
M_\beta & & & & 0 & -E_d & & & \\
& M_\beta & & & 0 & & -E_d & & \\
& & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\
& & & M_\beta & 0 & & & & -E_d \\
\hline
& & & & M_\beta & & & & \\
& & & & & M_\beta & & & \\
& \text{O} & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & M_\beta & \\
& & & & & & & & M_\beta
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ \vdots \\ X_{2m} \\ X_{2m+1} \end{bmatrix} = 0
$$

この方程式の係数行列を B_m とおけば，$\dim \mathrm{Hom}_A(M(m), M) = md + (m+1)d - \mathrm{rank}(B_m)$ で $\mathrm{Hom}_A(M(m), M)$ の次元を求めることができる．しかし，この状態だとランクの計算が複雑なので，B_m について，行および列基本変形を用いることによって階数標準形に変形する．具体的に計算すると，

$$
b_m(M) = \begin{bmatrix} M_\beta & M_\alpha & & & \\ & M_\beta & M_\alpha & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_\beta & M_\alpha \end{bmatrix}, \quad e_m(M) = \begin{bmatrix} E_d & & \\ & \ddots & \\ & & E_d \end{bmatrix}
$$

のような二つの行列の直和と B_m が同値となり，すなわち $B_m \cong b_m(M) \oplus e_{m+1}(M)$ となる．したがって，$\mathrm{rank} B_m = (m+1)d + \mathrm{rank}(b_m(M))$ となり，結果として

$$
\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}_A(M(m), M) &= md + (m+1)d - \mathrm{rank}(B_m) \\
&= md + (m+1)d - (m+1)d - \mathrm{rank}(b_m(M)) \\
&= md - \mathrm{rank}(b_m(M))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．他の直既約加群についても同様な計算をすることで各行列が得られる．上の結果も含めて次の行列を定義する．

定義 7.1. M を A 加群とする．$m \geq 1$，$n \geq 1$，$\lambda \in K$ として，次の行列を定義する．

$$b_m(M) = \begin{bmatrix} M_\beta & M_\alpha & & & & \\ & M_\beta & M_\alpha & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & M_\beta & M_\alpha \end{bmatrix},\ b_{-m}(M) = \begin{bmatrix} M_\beta & & & \\ M_\alpha & M_\beta & & \\ & M_\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_\beta \\ & & & M_\alpha \end{bmatrix}$$

$$b_{0,n}(M) = \begin{bmatrix} M_\beta & & & & \\ M_\alpha & M_\beta & & & \\ & M_\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & M_\beta & \\ & & & M_\alpha & M_\beta \end{bmatrix},\ b_{\infty,n}(M) = \begin{bmatrix} M_\alpha & & & & \\ M_\beta & M_\alpha & & & \\ & M_\beta & \ddots & & \\ & & \ddots & M_\alpha & \\ & & & M_\beta & M_\alpha \end{bmatrix},$$

$$b_{\lambda,n}(M) = \begin{bmatrix} C_\lambda & & & & \\ M_\alpha & C_\lambda & & & \\ & M_\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & C_\lambda & \\ & & & M_\alpha & C_\lambda \end{bmatrix},\ e_m(M) = \begin{bmatrix} E_d & & \\ & \ddots & \\ & & E_d \end{bmatrix}$$

ここで，$C_\lambda = \lambda M_\alpha - M_\beta$ と置いている．また，

$$b_0(M) = \begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix}$$

とする．

以上より，次の命題が成り立つ．

命題 7.2. M を A 加群とし，M の次元を d とする．$m \geq 1$，$n \geq 1$，$\lambda \in K$ とすると，次の公式が得られる．

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_A(M(0), M) &= d - \mathrm{rank}(b_0(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(M(m), M) &= md - \mathrm{rank}(b_m(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(M(-m), M) &= (m+1)d - \mathrm{rank}(b_{-m}(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(M(0)_n, M) &= nd - \mathrm{rank}(b_{0,n}(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(M(\infty)_n, M) &= nd - \mathrm{rank}(b_{\infty,n}(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_n, M) &= nd - \mathrm{rank}(b_{\lambda,n}(M)) \\ \dim \mathrm{Hom}_A(\overline{A}, M) &= d \end{aligned}$$

証明. 各直既約加群に対しての連立方程式の立て方は前述した通りである．それぞれの係数行列を B_m，B_{-m}，$B_{0,n}$，$B_{\infty,0}$，$B_{\lambda,0}$，$B_{\overline{A}}$ とおいて，具体的に計算すると，それぞれ次の行列の直和と同型となる．

$$\begin{aligned}
B_m &\cong b_m(M) \oplus e_{m+1}(M) \\
B_{-m} &\cong b_{-m}(M) \oplus e_m(M) \\
B_{0,n} &\cong b_{0,n}(M) \oplus e_n(M) \\
B_{\infty,n} &\cong b_{\infty,n}(M) \oplus e_n(M) \\
B_{\lambda,n} &\cong b_{\lambda,n}(M) \oplus e_n(M) \\
B_{\overline{A}} &\cong e_3(M)
\end{aligned}$$

したがって，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}_A(M(m), M) &= md + (m+1)d - \mathrm{rank}(B_m) \\
&= md - \mathrm{rank}(b_m(M)) \\
\dim \mathrm{Hom}_A(M(-m), M) &= md + (m+1)d - \mathrm{rank}(B_{-m}) \\
&= (m+1)d - \mathrm{rank}(b_{-m}(M)) \\
\dim \mathrm{Hom}_A(M(0)_n, M) &= 2nd - \mathrm{rank}(B_{0,n}) = nd - \mathrm{rank}(b_{0,n}(M)) \\
\dim \mathrm{Hom}_A(M(\infty)_n, M) &= 2nd - \mathrm{rank}(B_{\infty,n}) = nd - \mathrm{rank}(b_{\infty,n}(M)) \\
\dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_n, M) &= 2nd - \mathrm{rank}(B_{\lambda,n}) = nd - \mathrm{rank}(b_{\lambda,n}(M)) \\
\dim \mathrm{Hom}_A(\overline{A}, M) &= 4d - \mathrm{rank}(B_{\overline{A}}) = d
\end{aligned}$$

なお，$M(0)$ のときは,

$$\begin{aligned}
M_\alpha X &= X0 \\
M_\beta X &= X0
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} [X_1] = 0$$

が成り立つので，$\dim \mathrm{Hom}_A(M(0), M) = d - \mathrm{rank}(b_0(M))$ となる． □

以上より命題 7.2 と定理 6.4 から，対称 Kronecker 代数における問題 (I) の解法が次で得られる．

定理 7.3. M を A 加群とする．M の次元を d とし，$\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$ とすると次が成り立つ．

$$\boldsymbol{d}_M(\overline{A}) = \mathrm{rank}(b_1(M))$$

$$\boldsymbol{d}_M(M(m)) = \begin{cases} 2\mathrm{rank}(b_1(M)) - \mathrm{rank}(b_0(M)) - \mathrm{rank}(b_2(M)) + d & (m = 0) \\ 2\mathrm{rank}(b_{m+1}(M)) - \mathrm{rank}(b_{m+2}(M)) - \mathrm{rank}(b_m(M)) & (m \neq 0) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{d}_M(M(\lambda)_n) = \begin{cases} \mathrm{rank}(b_{\lambda,2}(M)) - 2\mathrm{rank}(b_{\lambda,1}(M)) & (n = 1) \\ \mathrm{rank}(b_{\lambda,n-1}(M)) + \mathrm{rank}(b_{\lambda,n+1}(M)) - 2\mathrm{rank}(b_{\lambda,n}(M)) & (n > 1) \end{cases}$$

証明. 定理 6.4 から，順番に直既約加群を適用すれば成り立つ．初めに対称 Kronecker 代数上の加群における次の概分裂完全列を考える．

$$0 \to M(-1) \to \overline{A} \oplus M(0) \oplus M(0) \to M(1) \to 0$$

これより，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_M(M(-1)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(-1), M) \\ &\quad - \dim \mathrm{Hom}_A(\overline{A}) - 2 \dim \mathrm{Hom}_A(M(0), M) \\ &\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(1), M) \\ &= 2d - \mathrm{rank}(b_{-1}(M)) \\ &\quad - d - 2d + 2\mathrm{rank}(b_0(M)) \\ &\quad + d - \mathrm{rank}(b_1(M)) \\ &= 2\mathrm{rank}(b_0(M)) - \mathrm{rank}(b_{-1}(M)) - \mathrm{rank}(b_1(M)) \end{aligned}$$

が成り立つ．次に

$$0 \to M(n-1) \to M(n) \oplus M(n) \to M(n+1) \to 0$$

の概分裂完全列を考えると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_M(M(n-1)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(n-1), M) \\ &\quad - 2 \dim \mathrm{Hom}_A(M(n), M) \\ &\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(n+1), M) \end{aligned}$$

となる．ここで，$n = 1$ とすれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_M(M(0)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(0), M) - 2 \dim \mathrm{Hom}_A(M(1), M) \\ &\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(2), M) \\ &= d - \mathrm{rank}(b_0(M)) - 2d + 2\mathrm{rank}(b_1(M)) \\ &\quad + 2d - \mathrm{rank}(b_2(M)) \\ &= 2\mathrm{rank}(b_1(M)) - \mathrm{rank}(b_0(M)) - \mathrm{rank}(b_2(M)) + d \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$n-1 \geq 1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_M(M(n-1)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(n-1), M) - 2\dim \mathrm{Hom}_A(M(n), M) \\
&\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(n+1), M) \\
&= (n-1)d - \mathrm{rank}(b_{n-1}(M)) - 2nd + 2\mathrm{rank}(b_n(M)) \\
&\quad + (n+1)d - \mathrm{rank}(b_{n+1}(M)) \\
&= 2\mathrm{rank}(b_n(M)) - \mathrm{rank}(b_{n+1}(M)) - \mathrm{rank}(b_{n-1}(M))
\end{aligned}$$

が成り立ち，$m = n-1$ とおけば結局

$$\boldsymbol{d}_M(M(m)) = 2\mathrm{rank}(b_{m+1}(M)) - \mathrm{rank}(b_{m+2}(M)) - \mathrm{rank}(b_m(M))$$

となる．また，$n-1 < -1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_M(M(n-1)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(n-1), M) - 2\dim \mathrm{Hom}_A(M(n), M) \\
&\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(n+1), M) \\
&= (-n+1)d - \mathrm{rank}(b_{n-1}(M)) \\
&\quad - 2(-n+2)d + 2\mathrm{rank}(b_{n-2}(M)) \\
&\quad + (-n+3)d - \mathrm{rank}(b_{n-3}(M)) \\
&= 2\mathrm{rank}(b_{n-2}(M)) - \mathrm{rank}(b_{n-3}(M)) - \mathrm{rank}(b_{n-1}(M))
\end{aligned}$$

が成り立ち，$-m = n-1$ とおけば結局，

$$\boldsymbol{d}_M(M(-m)) = 2\mathrm{rank}(b_{-(m+1)}(M)) - \mathrm{rank}(b_{-(m+2)}(M)) - \mathrm{rank}(b_{-m}(M))$$

となる．次に

$$0 \to M(\lambda)_1 \to M(\lambda)_2 \to M(\lambda)_1 \to 0$$

の概分裂完全列を考える．これにより $\boldsymbol{d}_M(M(\lambda)_1)$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_M(M(\lambda)_1) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_1, M) - \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_2, M) \\
&\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_1, M) \\
&= d - \mathrm{rank}(b_{\lambda,1}(M)) - 2d + \mathrm{rank}(b_{\lambda,2}(M)) \\
&\quad + d - \mathrm{rank}(b_{\lambda,1}(M)) \\
&= \mathrm{rank}(b_{\lambda,2}(M)) - 2\mathrm{rank}(b_{\lambda,1}(M))
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$0 \to M(\lambda)_n \to M(\lambda)_{n-1} \oplus M(\lambda)_{n+1} \to M(\lambda)_n \to 0$$

の概分裂完全列を考えると，これにより，$\boldsymbol{d}_M(M(\lambda)_n)$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_M(M(\lambda)) &= \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_n, M) \\
&\quad - \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_{n-1}, M) - \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_{n+1}, M) \\
&\quad + \dim \mathrm{Hom}_A(M(\lambda)_n, M) \\
&= nd - \mathrm{rank}(b_{\lambda,n}(M)) \\
&\quad - (n-1)d + \mathrm{rank}(b_{\lambda,n-1}(M)) - (n+1)d + \mathrm{rank}(b_{\lambda,n+1}(M)) \\
&\quad + nd - \mathrm{rank}(b_{\lambda,n}(M)) \\
&= \mathrm{rank}(b_{\lambda,n-1}(M)) + \mathrm{rank}(b_{\lambda,n+1}(M)) - 2\mathrm{rank}(b_{\lambda,n})
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，$M(0)_n$ および $M(\infty)_n$ についても同様に成り立つことは自明である．最後に $\boldsymbol{d}_M(\overline{A})$ だが，このときの概分裂完全列は

$$0 \to \overline{A} \to M(1) \to \tau^{-1}\overline{A} \to 0$$

のような形をしているが，命題 6.3 より $\overline{A}$ は移入加群であるので，$\tau^{-1}\overline{A} = 0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_M(\overline{A}) &= \dim \mathrm{Hom}_A(\overline{A}, M) - \dim \mathrm{Hom}(M(1), M) \\
&= d - d + \mathrm{rank}(b_1(M))) \\
&= \mathrm{rank}(b_1(M))
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，示された． □

7.2 問題 (II) に関する考察

対称 Kronecker 代数上の加群に対して問題 (II) は完全な解法が得られなかったため，以下に自分の考察および検討事項を紹介する．

前章で紹介した Kronecker 代数の問題 (II) の解法にならって，次の同型写像を用意する．

$$F\colon \bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))} \to M$$

対称 Kronecker 代数の場合, 直既約加群の同型類の完全集合 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L} = \mathcal{M}(m)\sqcup\mathcal{M}(\lambda)\sqcup\mathcal{A}$ なる集合であり，このとき，$\bigoplus_{L\in\mathcal{M}(m)} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$ の F による像を M'_m と書き，同様に $\bigoplus_{L\in\mathcal{M}(\lambda)} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$ の F による像を M'_λ とし，$\bigoplus_{L\in\mathcal{A}} L^{(\boldsymbol{d}_M(L))}$ による像を A' と書く．したがって，この F によって移された像により，任意の A 加群 M は次の形で書くことができる．

$$M = M'_m \oplus M'_\lambda \oplus A'$$

Kronecker 代数のやり方に倣うなら，AR クイバーを参照してこれらの直既約加群の間の既約写像の向きを考慮し，Trace および Reject を用いて，M'_m，M'_λ，A' のそれぞれの類を特定したい．

M の次元を d とし，$m>0$ で直既約 String 加群 $M(m)$ の次元が $2m+1\le d$ を満たすように m を取るとする．このときの，$\mathrm{Rej}_M(M(m))$ を計算する場合を考える．なお，$\mathcal{M}_m$ はさらに細かく分け，次の直既約加群の類の集合の和であると考えよう．

$$\mathcal{M}_m=\{M(m)\mid m\in\mathbb{Z}_{>0}\}\cup\{M(-m)\mid m\in\mathbb{Z}_{>0}\}\cup\{M(0)\}$$

これの F による像をそれぞれ M'_{+m} と M'_{-m} および M'_0 とする．以上の状況で，例えば $\mathrm{Rej}_M(M(m))$ は次のようになっている．

$$\begin{aligned}\mathrm{Rej}_M(M(m))&=\mathrm{Rej}_{M'_{+m}\oplus M'_{-m}\oplus M'_0\oplus M'_\lambda\oplus A'}(M(m))\\&=\mathrm{Rej}_{M'_{+m}}(M(m))\oplus\mathrm{Rej}_{M'_{-m}}(M(m))\oplus\mathrm{Rej}_{M'_0}(M(m))\\&\quad\oplus\mathrm{Rej}_{M'_\lambda}(M(m))\oplus\mathrm{Rej}_{A'}(M(m))\end{aligned}$$

$\mathrm{Rej}_{M'_\lambda}(M_\lambda)$ はまだ考慮すべき点があるが，AR クイバーを参照して，これらの直既約加群の間の既約写像の向きを考慮すると，$M(m)$，$(m>0)$ においてすべての Reject が消えない．しかし $M(-m)$ であれば，少なくとも $\mathrm{Rej}_{M'_{+m}}(M(-m))=0$, $\mathrm{Rej}_{M'_0}(M(-m))=0$, $\mathrm{Rej}_{A'}(M(-m))=0$ は成り立つと予想でき，さらに，M'_{-m} はある $a_i\ge 0$ について，直既約 String 加群 $M(-i)$ で $M'_{-m}=\bigoplus_{i=1}^m M(-i)^{(a_i)}$ のような形で書け，このとき，$\mathrm{Rej}_{M'_{-m}}(M(-m))=\bigoplus_{i=1}^m(\mathrm{Rej}_{M(-i)}(M(-m)))^{(a_i)}$ となる．いま $i\le m$ であるから，既約写像の向きを考慮すれば，$\mathrm{Hom}_A(M(-i),M(m))=0$ となるので，結局 $\mathrm{Rej}_{M'_{-m}}(M(-m))=0$ となると“予想”できる．

実際にこの代数上の直既約加群の間の準同型を計算すると，それらの間には常に準同型が存在することが分かる．この準同型について，その行列の形が同じ特徴を持つものを各グループに分けた．これらの計算結果を次にまとめる．

第 1 グループ：$m>0$，$n>0$ とする．ここで A は零行列でない適当な行列とする．

- $m\le n$ としたときの $M(-m)$ から $M(-n)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c}O_{n+1,m+1}&O_{n+1,m}\\\hline A_{n,m+1}&O_{n,m}\end{array}\right]$$

- $m\ge n$ としたときの $M(m)$ から $M(n)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c}O_{n,m}&O_{n,m+1}\\\hline A_{n+1,m}&O_{n+1,m+1}\end{array}\right]$$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{P}^1(K)$，$n, k > 0$ として，$M(\lambda)_n$ から $M(\mu)_k$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{k,n} & O_{k,n} \\ \hline A_{k,n} & O_{k,n} \end{array}\right]$$

- $M(-m)$ から $M(n)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{n,m+1} & O_{n,m} \\ \hline A_{n+1,m+1} & O_{n+1,m} \end{array}\right]$$

- $M(-m)$ から $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{n,m+1} & O_{n,m} \\ \hline A_{n,m+1} & O_{n,m} \end{array}\right]$$

- $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ から $M(m)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{m,n} & O_{n,n} \\ \hline A_{m+1,n} & O_{m+1,m} \end{array}\right]$$

第 2 グループ：$m > 0$，$n > 0$ とし，A，B，C を零行列でない適当な行列とする．

- $M(m)$ から $M(-n)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{n+1,m} & O_{n+1,m+1} \\ \hline C_{n,m} & B_{n+1,m+1} \end{array}\right]$$

- $M(m)$ から $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{n,m} & O_{n,m+1} \\ \hline C_{n,n} & B_{n,m+1} \end{array}\right]$$

- $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ から $M(-m)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{m,n} & O_{n,n} \\ \hline C_{m+1,n} & B_{m+1,n} \end{array}\right]$$

第 3 グループ：$M(0)$ については次の形になる，$m \geq 0$，$n > 0$ とし，A を零行列でない適当な行列とする．

- $M(0)$ から $M(m)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c} O_{m,1} \\ \hline A_{m+1,1} \end{array}\right]$$

- $M(0)$ から $M(-m)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c} O_{m+1,1} \\ \hline A_{m,1} \end{array}\right]$$

- $M(0)$ から $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c} O_{n,1} \\ \hline A_{n,1} \end{array}\right]$$

- $M(m)$ から $M(0)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{1,m} & O_{1,m+1} \end{array}\right]$$

- $M(-m)$ から $M(0)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{1,m+1} & O_{1,m} \end{array}\right]$$

- $M(0)_n$，$M(\infty)_n$，$M(\lambda)_n$ から $M(0)$ への準同型

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{1,n} & O_{1,n} \end{array}\right]$$

したがって，任意の直既約加群の間に何かしらの準同型が存在する．これに加えて $\overline{A}$ との間にもゼロでない準同型が存在する．ここで第 1 グループと第 2 グループでの関係をおおまかに矢印を用いて図示すると次のようになっている．この矢印は各グループの行列の形で準同型が存在するということである．$m > 0$ および $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$ とする．ここで，通常の矢印は第 2 グループ，点線の矢印が第 1 グループの関係としている．

$$\begin{tikzcd}
M(m) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend right] & & M(-m) \arrow[ll, dashed] \arrow[dl, dashed] \\
& M(\lambda) \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

$M(-m)$ から $M(m)$ には既約写像が向いていたので，これを踏まえれば第 1 グループの関係が通常予想される準同型の向きであるが，その逆の準同型も存在している．よって，単純にこの代数上の加群に対しては Kronekcer 代数の場合と同じように Trace と Reject を計算することができない．ここで，次の事実がある．対称 Kronekcer 代数 A と Kronekcer 代数 B には次の圏同値が存在する．

$$\underline{\mathrm{mod}}(A) \cong \underline{\mathrm{mod}}(B)$$

この二つの圏は Auslander-Reiten 理論のところで紹介した射影安定圏である．したがって，射影対象を経由するものを除いてこの二つが圏同値となっている．対称 Kronecker

代数上の加群はそれに対応する Kronekcer 代数上の加群との間に適切な対応付けができれば，Kronecker 代数上の加群における問題 (II) の解法によって対称 Kronecker 代数上の加群に対する問題 (II) の解法が得られるのではないかと予想した．

対称 Kronekcer 代数における射影対象はいま直既約射影移入加群 $\overline{A}$ のみであるから，これを経由する準同型をすべてゼロにすればよい．では $\overline{A}$ を経由する準同型は何があるかというと，まず明らかに $M(-m) \to M(n)$ なる対象間の準同型は A を経由していることが AR クイバーから読み取れる．この準同型は第 1 グループのところで示した通り，左下のブロック行列のみ零でないような準同型である．この準同型は $M(-m)$ の基底を $M(n)$ 内のどの元に対応させる写像であるだろうか．$M(-m)$ の基底を $\{u_1, u_2, \ldots, u_{2m+1}\}$ とし，$M(n)$ の基底を $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}\}$ として，この加群を String 加群の定義から図示するとそれぞれ次のようになる．ここで，通常の矢印が α にあたる線形写像であり，点線が β にあたる線形写像である．

$M(-m)$：

$$
\begin{tikzcd}
u_{m+1} \arrow[dr] & u_m \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \cdots \arrow[dr] & u_2 \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & u_1 \arrow[d, dashed] \\
 & u_{2m+1} & \cdots & u_{m+3} & u_{m+2}
\end{tikzcd}
$$

$M(n)$：

$$
\begin{tikzcd}
 & v_n \arrow[dl] \arrow[d, dashed] & \cdots \arrow[dl] & v_2 \arrow[dl] \arrow[d, dashed] & v_1 \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \\
v_{2n+1} & v_{2n} & \cdots & v_{n+2} & v_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

$M(-m)$ の基底を縦ベクトルに並べて，$M(-m)$ から $M(n)$ への準同型に対応する行列に適用させると，

$$
\left[\begin{array}{c|c} O_{n,m+1} & O_{n,m} \\ \hline A_{n+1,m+1} & O_{n+1,m} \end{array}\right]
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2m} \\ u_{2m+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}u_1 \\ \vdots \\ c_{2n+1}u_{2m+1} \end{bmatrix}
$$

となる．ここで，$c_i \in K$ を $M(m)$ のベクトルの適当な係数としている．これから，$M(-M)$ の頂点 $\mathrm{top}(M(-m))$ に対応する基底が $M(m)$ の底 $\mathrm{soc}(M(m))$ に行っていることがわかる．

さらに，計算により任意の直既約加群から $\overline{A}$ に向かう準同型と $\overline{A}$ から直既約加群に向かう準同型は行列として次の特徴があることが分かった．直既約加群を M とし，A を適当な行列とする．

- $M \to \overline{A}$ なる準同型の表現行列は一番下の行がすべてその準同型の基底で埋まり．一番上の行がすべて 0 になる．すなわち，M の次元を d とし，この準同型の基底を f_i で表せば,
$$\left[\begin{array}{c} 0,0,\dots,0 \\ \hline A_{2,d} \\ \hline f_1,f_2,\dots,f_d \end{array}\right]$$
となる．
- $\overline{A} \to M$ なる準同型の表現行列は一番左の列がすべてその準同型の基底で埋まり．一番右の列がすべて 0 で埋まる．すなわち，M の次元を d とし，この準同型の基底を f_i で表せば,
$$\left[\begin{array}{c|c|c} f_1 & & 0 \\ f_2 & & 0 \\ \vdots & A_{d,2} & \vdots \\ f_d & & 0 \end{array}\right]$$
となる．

このとき，零でない適当な行列 A には f_i なる基底が含まれている可能性があることに注意する．ここで，直既約射影移入加群 $\overline{A}$ の構造を図示すると次のようになる．．$\overline{A}$ の基底を $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とする．

$\overline{A}$：

$$\begin{tikzcd}
& e_1 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr] & \\
e_3 \arrow[dr] & & e_2 \arrow[dl, dashed] \\
& e_4 &
\end{tikzcd}$$

すなわち，$M \to A$ となる準同型は M のいくつか基底を除きすべて $\mathrm{soc}(\overline{A})$ に飛ばし，A の頂点 $\mathrm{top}(\overline{A})$ には元は対応しないということである．さらに，$\overline{A} \to M$ なる準同型は A の頂点 $\mathrm{top}(\overline{A})$ に対応する基底 e_1 を M のすべての元に対応させていて，A の底 $\mathrm{soc}(A)$ から M には元が対応しないということである．

以上より，次の予想を命題として立てた．

命題 7.4. A を対称 Kronekcer 代数とする．A 上の任意の加群 M と N について，それらの間の準同型 $f\colon M \to N$ が $\overline{A}$ を経由するならば

$$f(\mathrm{top}(M)) \subseteq \mathrm{soc}(N)$$

となる．

証明. $h\colon M \to \overline{A}$，$g\colon \overline{A} \to N$ とし，$f = g \circ h$ となるとする．

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{top}(M)) &= g \circ h(\mathrm{top}(M)) \\
&= g(h(\mathrm{top}(M))) \\
&= g(h(M/\mathrm{soc}(M))) \\
&= g(h(M)/h(\mathrm{soc}(\overline{A}))) \\
&= g(\mathrm{rad}(\overline{A})/\mathrm{soc}(\overline{A})) \\
&= g(\mathrm{rad}(\overline{A}))/g(\mathrm{soc}(\overline{A})) \\
&= \mathrm{rad}(N)/0 \\
&= \mathrm{rad}(N) \\
&= \mathrm{soc}(N)
\end{aligned}$$

□

先に示した準同型の各グループにおいて頂点から底への準同型に対応する場所はブロック行列における左下の区画である．対称 Kronecker 代数の加群圏における射影安定圏については第 1 グループと第 3 グループの準同型はすべてゼロになる．したがって，準同型の存在を第 2 グループの場合に限って Trace 及び Reject を計算すれば対称 Kronecker 代数上の加群について問題 (II) の解法が得られると予想した．

以上で考察を終える．

8 参考文献

参考文献

[AF19] F. W. Anderson and K. R. Fuller, “Rings and categories of modules Second edition”, Graduate Textsin Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 1992.

[ANY17] H. Asashiba, K. Nakashima, and M. Yoshiwaki, "Decomposition theory of modules: the case of Kronecker algebra", Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 34.2 (2017): 489–507.

[ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński, "Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1", Techniques of representation theory LMS Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[D79] Yu. A. Drozd, "Tame and wild matrix problems", In: Representations and Quadratic Forms, Academy of Science, Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (1979), 39–74, (in Russian).

[G74] F. R. Gantmacher, "Matrix theory", vol.1 and 2, Chelsea, NewYork, 1974.

[L16] R. Laking, "String Algebras in Representation Theory", Doctoral thesis, The University of Manchester (United Kingdom), 2016.

[M19] K. Miyamoto, "On the non-periodic stable Auslander–Reiten Heller component for the Kronecker algebra over a complete discrete valuation ring", Osaka J. Math. 56(**3**) (2019), 459–496.

[M23] K. Miyamoto, "On periodic stable Auslander–Reiten components containing Heller lattices over the symmetric Kronecker algebra", Journal Pure and Applied Algebra 227(4) (2023).

[S18] S. Schroll, "Brauer graph algebras: a survey on Brauer graph algebras, associated gentle algebras and their connections to cluster theory", Homological methods, representation theory, and cluster algebras (2018): 177–223.

[S14] R. Schiffler, "Quiver Representations", CMS Books in Mathematics, Springer, 2014.

[SY11] A. Skowroński and K. Yamagata, "Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory" , EMS Textbooks in Mathematics, *European Mathematical Society*, 2011.

[W85] B. Wald and J. Waschbu "Tame biserial algebras", Journal of algebra 95(**2**) (1985), 480–500.