0　数学の記号など

• 0-1： 集合の記号

まず, 本講義に限らず, サイエンスの世界で用いられる記号や約束を紹介しよう.

条件がはっきりとしているようなものの集まりを**集合**といい, このとき集められている 1 つ 1 つのものを**元**または**要素**という. 「条件がはっきりしている」というのは, 集合の元であるという条件がきっちりと明示されているということである. 例えば, 「ネコ科の動物の集合」は問題なく集合であるが, 「狐が大好きな人の集合」と言ったときには「大好き」の基準が人によって異なるため, 数学で扱う意味での集合ではない.

集合を表す記号を表にまとめておこう. 以下の表では A と B は集合とする.

記号	日本語	意味
$a \in A$	a は集合 A に属する	a は集合 A の元である.
$a \notin A$	a は集合 A に属さない	a は集合 A の元ではない.
$A \subset B$	A は B の部分集合	A の元はすべて B にも属している.
$A \not\subset B$	A は B の部分集合ではない	$A \subset B$ ではない.
$A \subseteq B$	A は B の部分集合, または $A = B$	$A \subset B$ もしくは $A = B$ のいずれかである.
$A \subsetneq B$	A は B の真の部分集合	$A \subset B$ かつ $A \neq B$ である.
$\varnothing$	空集合	元がひとつもない集合
$A \cap B$	A と B の共通部分	A と B の両方に属するもの全体の集合
$A \cup B$	A と B 和集合	A と B の少なくとも一方には属するもの全体の集合
$\overline{A}$	A の補集合	全体集合 U のうち, A に属さないもの全体の集合

数学では, 特別な集合に対してはそれを表す記号が用意されており, 本講義でも用いるので紹介しておく.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ = 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$ = 整数全体の集合
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ = 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i$ は虚数単位 $\}$ 複素数全体の集合

これらの記号を実際に板書するときは, 原則としてアルファベットの左側を二重線などで書き表すことが多い.

• 0-2： 実数 $\mathbb{R}$ の区間

高校では「b が a 以上」というのを不等号を用いて「$a \leqq b$」と表していた. 大学以降では, 「$a \leqq b$」の $=$ の部分の線を 1 本省略して「$a \leq b$」などと書く.

2 つの実数 $a < b$ に対して, a, b に対する**閉区間** $[a, b]$, **開区間** (a, b), **半開区間** $(a, b]$, $[a, b)$ はそれぞれ以下のように定義される集合である.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

また,

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

として表し, これらを総称して実数 $\mathbb{R}$ の**区間**よ呼ぶ.

• 0-3： 全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$

いろいろな命題を簡略化して述べるために, 次のような記号を導入すると大変便利である.

- 「集合 A の**任意の**元 $a \in A$ は条件 $P(a)$ を満たす」ことを「$\forall\, a \in A,\ P(a)$」と書く. 記号 $\forall$ は「すべての」という意味の記号である.
- 「集合 A の元 $a \in A$ で, 条件 $P(a)$ を**満たすものがある**」ことを, 「$\exists\, a \in A$ (s.t.) $P(a)$」と書く. ここで, (s.t.) は such that の省略形である. 記号 $\exists$ は「ある」「存在する」の意味の記号である.

例 0-1　(1) 任意の自然数 n に対して, n^2 も自然数である. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \in \mathbb{N}$$

(2) 任意の自然数 n に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する. これを上記の記号を用いて書くと, 以下の通り.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} \quad \text{(s.t.)} \quad p\ \text{は素数で}\ n < p \leq 2n$$

• 0-4： 命題の必要条件, 十分条件

2 つの条件 P, Q に対して, 命題「P ならば Q」が真であるとき, このような命題を「$P \Longrightarrow Q$」で表す. このとき, P は Q であるための**十分条件**といい, Q は P であるための**必要条件**であるという. 必要条件かつ十分条件であるような条件を**必要十分条件**と呼ぶ. 命題「$P \Longrightarrow Q$」かつ命題「$Q \Longrightarrow P$」であるとき, これを「$P \Longleftrightarrow Q$」で表す. このとき, P と Q は**同値**であるという.

• 0-5： 数学の議論に用いられる用語

高校数学で「$y = \sin x$ を**定義**に従って微分せよ」と出題されることや, あるいは問題を解くときに「三平方の**定理**より...」などと述べる機会があったように思う. 数学の問題を議論をする上では, これらの言葉の意味をしっかりと理解しておかなければならない. 以下に, よく出てくる言葉とその意味をまとめた.

言葉	意味
定義	概念や記号の意味を明確に規定するために用いられる文章や式のことをいう.
公理	証明なしに認められている事柄のこと.
定理	数学的に論理的な証明によって正しいと認められている結果, 事実のこと.
補題	証明したい命題や定理を示すために補助的に用いられる証明済の主張のこと.
系	証明済みの結果, あるいは証明の過程で得られた事実や, 即座に得られる主張のこと.

• 0-6： ギリシャ文字

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ, ϱ	ロー
B	β	ベータ	K	$\kappa, \varkappa$	カッパ	Σ	σ	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ウプシロン
E	ϵ, ε	イプシロン	N	ν	ヌー	Φ	φ, ϕ	ファイ
Z	ζ	ゼータ	Ξ	ξ	グザイ, クシー	X	χ	カイ
H	η	イータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ	プサイ
Θ	θ, ϑ	シータ	Π	π, ϖ	パイ	Ω	ω	オメガ

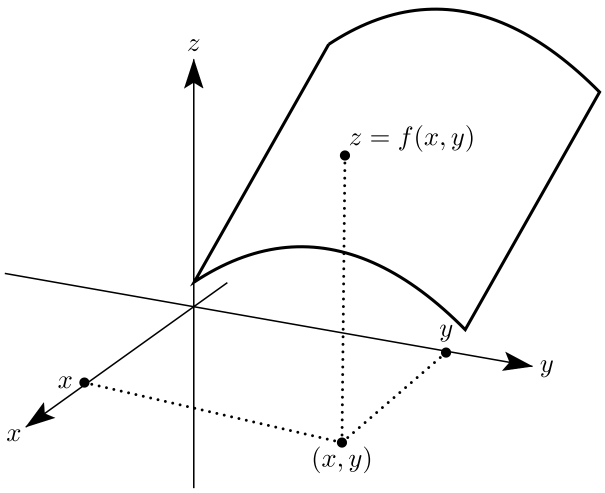
1　多変数の極限

• **1-1： Euclid 空間と多変数関数**

これまでは $y = f(x)$ という形の 1 変数の関数のみを扱ってきたが, 変数を増やして

$$z = f(x, y), \quad w = f(x, y, z), \ldots$$

などを考えよう．例えば, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ では, (x, y) という組を 1 つ決めれば z の値がただ一つ決まる．一般に n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に依存して, ある実数 $z \in \mathbb{R}$ が定まるような規則 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を**n 変数関数**という．このとき, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を**独立変数**, z を**従属変数**という．2 変数関数 $z = f(x, y)$ は, xyz-座標空間の曲面を表す．



n 個の実数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体の集合を $\mathbb{R}^n$ で表し, これを**n 次元 Euclid 空間**という．$\mathbb{R}^1$ は実数全体 $\mathbb{R}$ に他ならない．$\mathbb{R}^2$ を**(2 次元）平面**, $\mathbb{R}^3$ を**(3 次元）空間**などと呼ぶ．1 変数の場合と同様に $\mathbb{R}^n$ の要素のことを $\mathbb{R}^n$ の**点**と呼ぶこともある．また, $\mathbb{R}^n$ の要素 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を太文字を用いてまとめて $\boldsymbol{x}$ と書くことがある:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

こうして, 多変数関数がきちんと定義される．n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D をとり, D の各点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して, 実数 z がただ一つだけ対応しているとき, この対応を

$$z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と書いて, **D を定義域とする n 変数関数**と呼ぶ．

• **1-2： 多変数関数の極限**

1 変数の場合と同様に, 多変数関数についても「極限」を考えることができる．

【定義：多変数関数の極限】

n 次元 Euclid 空間内の点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ とし, n 変数関数 $z = f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の周りで定義されているとする．このとき, **$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ を満たしながら $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ に限りなく近づければ, $z = f(\boldsymbol{x})$ がある値 α に限りなく近づく**とき, これを

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$$

または

$$f(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \alpha \quad (\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a})$$

と表す．これを $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ に近づけたとき, $z = f(\boldsymbol{x})$ は**極限 α に収束する**という．

極限の扱いは, 1 変数のときと多変数のときとでは様相がだいぶ異なる．

1 変数関数 $y = f(x)$ について, $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ とは, $x \neq a$ を満たしながら x を a に限りなく近づけたとき $f(x)$ が α に限りなく近づく, ということであった．このとき, x を a に近づける際, その近付いてくる点は a の左側にあるか, 右側にあるかの 2 択である．

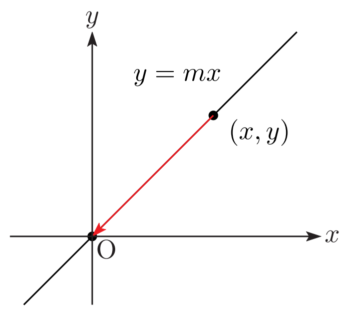
一方, 例えば 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について,

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = \alpha$$

というのは, $(x, y) \neq (a, b)$ を満たしながら点 (a, b) に限りなく近づけたとき $f(x, y)$ の値が α に近づく, ということであるが, (x, y) を (a, b) に近づける際, その近付いてくる点はどの方向から向かってくるかわからない．一方向から真っ直ぐに近付いてくるのかもしれないし, 渦を巻きながら近付いてくるかもしれない．つまり, 近づき方が千差万別で, 極限とは近づき方に依存せずに値が定まらなければいけないということに注意しよう．

例 1-1　$z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ は原点 $(0, 0)$ において極限をもつか考えてみる．つまり, $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ を求めてみる．直線 $y = mx$ に沿った経路で (x, y) を $(0, 0)$ に近づけよう．すると,

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$



となり, m の値が変われば, $\dfrac{m}{1 + m^2}$ の値も変わるので, この式は m に依存している．　極限というのは **近づけ方に依存してはいけない** ので, 今の場合は $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ は存在しないことがわかった．

ある特定の近づけ方をしたときに, 関数の値が変わってしまうような状況だと, 極限は「存在しない」が正解なんだよ!
だから, 存在しないのに式変形するとき lim の記号をつけちゃって

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{m}{1 + m^2}$$

なんて書かないようにしてね!

では, 多様な近づけ方をしても値が変わらないことを示すにはどうすればよいだろうか．その為には, 極座標を用いると良い．つまり, 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として, **$r \to 0$ としたとき θ の値に依存しなければ**よい．具体例を見ていこう．

例 1-2　$z = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ は原点 $(0, 0)$ において極限をもつ．そこで, $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ を求めてみる．直線 $y = mx$ に沿った経路で (x, y) を $(0, 0)$ に近づけよう．すると,

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 - (mx)^3}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x(1 - m^3)}{1 + m^2} \longrightarrow 0 \quad ((x, y) \longrightarrow (0, 0))$$

だから，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$ である．

さっきの例と違って，最後に $(x,y)\to(0,0)$ としたときに m が式になくなっちゃうんだね．
極限は近付け方に依存しないから，値は簡単にもとまるね!

例 1-3　$z = \dfrac{x^3-8y^3+2x^2+8y^2}{x^2+4y^2}$ は原点 $(0,0)$ において極限をもつか考えてみる．つまり，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-8y^3+2x^2+8y^2}{x^2+4y^2}$ を求めてみる．$r>0$ として，極座標への変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと，$(x,y)\to 0$ は $r\to 0$ と同じである．よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3-8y^3+2x^2+8y^2}{x^2+4y^2} &= \frac{r^2(r\cos^3\theta - 8r\sin^3\theta + 2\cos^2\theta + 8\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)} \\
&= \frac{r\cos^3\theta - 8r\sin^3\theta + 2(1-\sin^2\theta) + 8\sin^2\theta}{(1-\sin^2\theta) + 4\sin^2\theta} \\
&= \frac{r(\cos^3\theta - 8\sin^3\theta) + 2 + 6\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta} \\
&= \frac{r(\cos^3\theta - 8\sin^3\theta) + 2(1+3\sin^2\theta)}{1+3\sin^2\theta} \\
&= \frac{r(\cos^3\theta - 8\sin^3\theta)}{1+3\sin^2\theta} + 2 \\
&\longrightarrow 2 \quad (r \longrightarrow 0)
\end{aligned}
$$

だから，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-8y^3+2x^2+8y^2}{x^2+4y^2} = 2$ である．

レポート 1-1　次の極限が存在するか調べ，存在するならその値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

1 変数のときと同様にして，極限は次の性質をもつ．証明は ϵ-δ 論法を利用するので，ここでは割愛する．

定理 1.1 (極限の性質)**.** n 変数関数 $z = f(\boldsymbol{x})$, $z = g(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の周りで定義されているとする．$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \beta$ とするとき，以下の等式が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \{f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\} = \alpha \pm \beta$　　（複合同順）

(2) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \{kf(\boldsymbol{x})\} = k\alpha$　　$(k \in \mathbb{R})$

(3) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \{f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\} = \alpha\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{\alpha}{\beta}$　　$(\beta \neq 0)$

● 1-3： 多変数関数の連続性

【定義：多変数関数の連続】

n 変数関数 $z = f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ とその周りで定義されているして, $z = f(\boldsymbol{x})$ の定義域を D とする．このとき,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

が成り立つとき, $z = f(\boldsymbol{x})$ は **点 $\boldsymbol{a}$ で連続である** という． D のすべての点 $\boldsymbol{a}$ で連続であるとき, 関数 $z = f(\boldsymbol{x})$ は単に**連続である**という．

例 1-4　2 変数関数 $z = f(x, y)$ を次の式で定義する:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

これは原点 $(0,0)$ で連続である．実際, $r > 0$ として, 極座標への変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと, $(x,y) \to 0$ は $r \to 0$ と同じであるので,

$$\frac{y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3 \sin^3\theta}{r^2} \longrightarrow 0 \quad (r \longrightarrow 0)$$

であり, この極限は $f(0,0)$ と一致している．

【コラム：実際, ～】

数学やサイエンスの論文では, 「〇〇である．実際, □□」という型の文章をよく見かける．これは, 〇〇のところで先に結論を述べていて, □□のところでその理由を述べている．つまり,

「〇〇である．実際, □□」=「□□だから〇〇が成り立つ」

という論理構造となっている．結論を先に書かれてしまうので, 「なぜそんなことがいえるのだ？」と疑問に思ったとしても, その続きに「実際, $\cdots$」があれば理由が書かれているのでラッキーだと思って文章を最後まで読み進めよう．

.

レポート 1-2　c を定数とする．このとき, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ が以下で定義されていたとする．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ c & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

この関数が原点で連続となっているとき, 定数 c の値を求めよ．