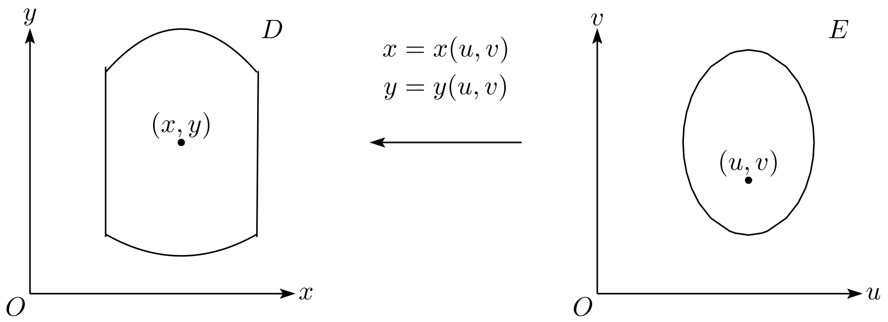
10　重積分の変数変換 (1)

- **10-1：変数変換の考え方**

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で重積分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について，x および y が u, v に関する関数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

で表されていたとする．この対応によって，xy 平面の領域 D が uv 平面の領域 E に変換されたとしよう．ここでの目標は重積分 $\iint_D f(x, y)dxdy$ を E 上の u, v に関する重積分に変換して計算することである，そのためには，$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ によって領域 D が領域 E に **1:1 にうつると仮定する．** 「1:1 にうつる」とは，D 上の異なる点 (x, y) に対して E 上の異なる点 (u, v) が対応する，ということである．



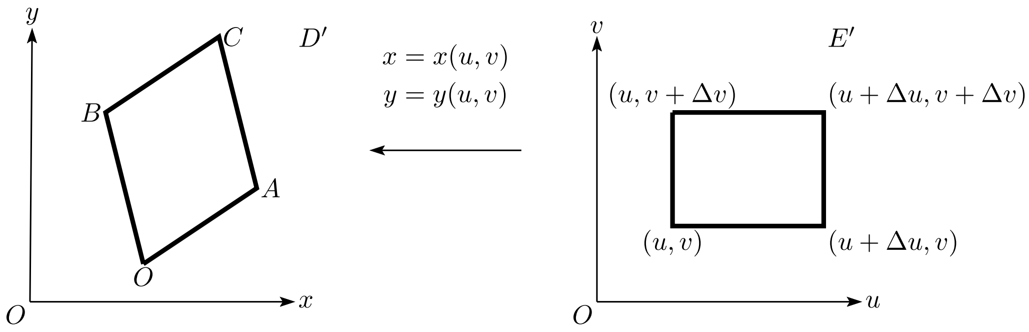
重積分の定義を思い出そう．

$z = f(x, y)$ を有界領域 D 上で重積分可能な関数とする．領域 D を LN 個の微小長方形 $D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ で細かく分割し，各小長方形 D_{ij} から任意に点 (x_{ij}, y_{ij}) をとり，D_{ij} の面積を S_{ij} とおくとき

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{L,N \to \infty} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij}) S_{ij}$$

と定義されていたのであった．従って，重積分は微小長方形の面積 S_{ij} に関数の値 $f(x_{ij}, y_{ij})$ をかけた値の和の極限ということになる．

さて，目標は重積分を変数変換によって計算することである．この変換によって uv 平面上の微小長方形 $E' = [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$ が xy 平面の微小領域 D' に変換されたしよう．領域 E' が十分小さければ領域 D' は平行四辺形に近似される．



領域 D' での点 O, A, B, C のそれぞれの座標は

$$\begin{aligned} &O(x(u, v), y(u, v)), && A(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)), \\ &B(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v)), && C(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)) \end{aligned}$$

で表される．領域 E' が領域 D' に変換されるので，面積がどのように変化するか観察してみよう．まず，微小長方形 E' の面積は $\Delta u \Delta v$ なので $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ とすれば

$$E' \text{ の面積} \longrightarrow dudv$$

となる．

一方，D' の面積は，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ がつくる平行四辺形の面積に近似される．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x(u+\Delta u, v) - x(u,v) \\ y(u+\Delta u, v) - y(u,v) \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} x(u, v+\Delta v) - x(u,v) \\ y(u, v++\Delta v) - y(u,v) \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix}$$

なので

$$D' \text{ の面積} \fallingdotseq \left| \mathsf{det} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix} \right| = \left| \mathsf{det} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v$$

となる．ここで $\mathsf{det}(A)$ は行列 A の行列式を表す．そこで

$$|\,J\,| = \left| \mathsf{det} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

とおき，これを変数変換 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ の **ヤコビアン** という．ここで，$\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ とすれば

$$D' \text{ の面積} \longrightarrow |\,J\,| dudv$$

となる．

まとめると，$\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ とすれば

$$E' \text{ の面積} \longrightarrow dudv, \quad D' \text{ の面積} \longrightarrow |\,J\,| dudv$$

であるから，領域 E' を変数変換で領域 D' に変換したとき面積は $|\,J\,|$ 倍されていることがわかった．

• 10-2：重積分における変数変換

E を uv 平面の領域として，$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ によって E は xy 平面の領域 D に 1:1 で対応しているとする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 10.1. $z = f(x,y)$ は領域 D 上で重積分可能な連続関数とする．ヤコビアン $|\,J\,|$ が 0 でなければ

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))|\,J\,|dudv$$

が成り立つ．

これの証明は複雑なので省略するが，それぞれの微小領域が $|\,J\,|$ 倍されていることから成り立ちそうだというイメージはつくだろう．以下，変数変換の具体例を計算していくことにしよう．

• 10-3：一次変換

a, b, c, d を実数とする．このとき，変換

$$x = au + bv, \quad y = cu + dv$$

を **一次変換** という．このとき，ヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|$$

となるので，一次変換によって uv 平面の領域 E が xy 平面の領域 D に 1:1 で対応しているとすれば，**定理 10.1** より次の式が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(au+bv, cu+dv)|ad-bc|dudv$$

例 10-1　以下の重積分を計算しよう．

$$\iint_D (2x+y)\sin(2x-y)dxdy, \quad D = \left\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 2x+y \le \pi,\, 0 \le 2x-y \le \pi\right\}$$

$u = 2x+y,\ v = 2x-y$ とおくと

$$x = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v, \quad y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$$

である．従ってヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{4} \ne 0$$

である．また，この変換によって領域 D は uv 平面の領域

$$E = \left\{(u,\,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le \pi,\, 0 \le v \le \pi\right\}$$

と 1:1 対応して，これは縦線領域（横線領域でもある）である．従って，

$$\begin{aligned} \iint_D (2x+y)\sin(2x-y)dxdy &= \iint_E u\sin v \cdot \frac{1}{4}dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \Big[-u\cos v\Big]_0^\pi du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi udu = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

レポート 10-1　以下の重積分を計算せよ．

(1) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1,\ |x-y| \le 1\}$
(2) $\iint_D (x-y)^2(x+y)^4dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1,\ |x-y| \le 1\}$