11　重積分の変数変換 (2)

- **11-1：極座標変換**

平面上の直交座標 (x, y), および原点を極とし x 軸を始線とする極座標 (r, θ) の関係式は次式で与えられる.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

この変換を **極座標変換** という. 極座標変換によって, xy 座標の領域 D が $r\theta$ 平面の領域 E と 1:1 に対応しているとすると, 極座標変換のヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \right| = |r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)| = r$$

となるので, **定理 10.1** より次の式が成り立つ.

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

- **11-2：領域が 1:1 対応しない場合の変数変換**

座標変換の式は, 変換によって積分領域が 1:1 に対応して, ヤコビアンに関して $|J| \neq 0$ である必要があった. しかし, 変数変換が 1:1 とならない点や変数変換のヤコビアンが 0 になる点が存在する場合でも, **それらの点全体の集合の面積が 0** ならば変数変換の式が成り立つことが知られている.

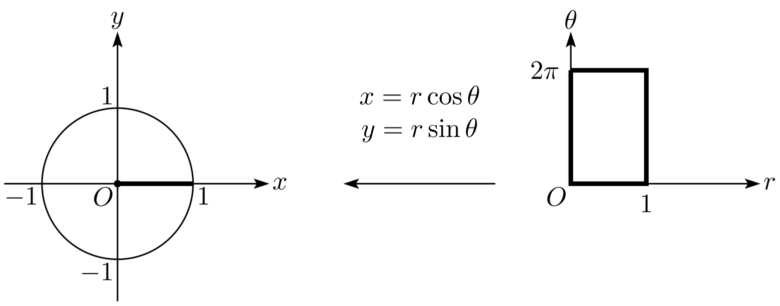
例えば, 極座標変換によって, 半径が 1 の円周および内部の点の集合

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

は極座標変換によって $r\theta$ 平面の長方形

$$E = \left\{(r,\, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

と対応する.



この変換によれば, xy 座標の原点では θ の値は自由であるし, $\theta = 0$ のときと $\theta = 2\pi$ のときは同じ値を取るため, この対応は 1:1 ではない. しかし, これら 1:1 とならないような点の集合の面積は 0 である. （直感的には, 点や線分は面積が 0 であるから, 積分をする上では問題ない. ）

例 11-1　以下の重積分を計算しよう.

$$\iint_D x^2 dxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

極座標変換によって $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと, xy 平面の領域 D は $r\theta$ 平面の長方形

$$E = \left\{(r,\, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

に対応する. 従って,

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_E r^2 \cos^2\theta \cdot r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta dr = \int_0^1 \pi r^3 du = \frac{\pi}{4}$$

レポート 11-1　以下の重積分を計算せよ.

(1) $\iint_D x^3 dxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ \ x \geq 0\right\}$

(2) $\iint_D \dfrac{1}{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ y \geq 0\right\}$

(3) $\iint_D (x^2+y^2) dxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$

- **11-3 : 2 曲面で囲まれた体積**

領域 D 上で重積分可能な 2 つの 2 変数関数 $z = f(x,y)$ および $z = g(x,y)$ が, 領域 D 上で常に

$$f(x,y) \leq g(x,y)$$

を満たすとする. このとき, xyz 空間内の集合

$$L = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,\, y) \in D,\ \ f(x,\, y) \leq z \leq g(x,\, y)\right\}$$

を考える. L の **体積** V は

$$V = \iint_D \{g(x,y) - f(x,y)\} dxdy$$

で定義される.

例 11-2　円柱 A を $x^2 + y^2 \leq 1$, 円柱 B を $y^2 + z^2 \leq 1$ とするとき, これらの円柱の共通部分の体積を求めてみよう.

円柱 A と円柱 B の共通部分を L とすると

$$L = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ \ y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

である. $y^2 + z^2 \leq 1$ を変形すると

$$-\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$$

であるから, $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ とおくと

$$L = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,\, y) \in D,\ \ -\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}\right\}$$

である．よって, L の体積は

$$\begin{aligned} L &= \iint_D 2\sqrt{1-y^2}dxdy = 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dxdy \\ &= 2\int_{-1}^{1}\left[x\sqrt{1-y^2}\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dy \\ &= 4\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

レポート 11-2　$a \geq 0$ とする．原点中心で半径が a の球面

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

および, 円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ で囲まれた共通部分の体積を求めよ．