12　広義重積分

- **12-1：領域の近似増加列**

1 変数のときと同様に, 2 変数関数が有界でない場合や関数の値が発散するような点を含む領域の積分を考えよう.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して, D を近似するような $\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{D_n\}$ を以下のように定める.

(i) 全ての正の整数 n に対して, D_n はコンパクトな集合（つまり, $\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合）である.
(ii) 全ての正の整数 n に対して, $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ である.
(iii) 任意のコンパクト集合 $F \subset D$ に対して, ある n が存在して $F \subset D_n$ とできる.

この $\{D_n\}$ を D の **近似増加列** と呼ぶ.

例 12-1　xy 平面の第一象限を D とする.

(1) 正の整数 n に対して, 1 辺が n の正方形

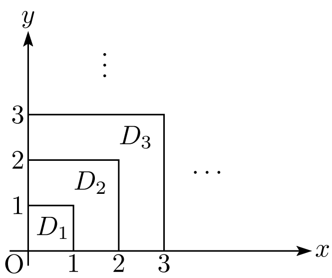
$$D_n = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le n,\ \ 0 \le y \le n\right\}$$

をとる. これは長方形領域 $[0,n] \times [0,n]$ のことである. このとき, $\{D_n\}$ は D の近似増加列である.

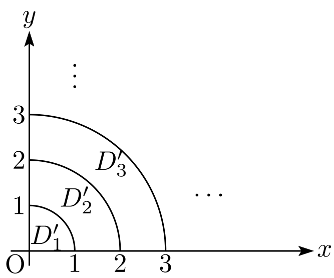
(2) 正の整数 n に対して, 集合 D'_n を

$$D'_n = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le n^2,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0\right\}$$

とおく。これは, 原点中心で半径が n の円の周および内部のうち, 第 1 象限にあるような中心角が $\frac{\pi}{2}$ の扇形である. $\{D'_n\}$ は D の近似増加列である.



(1) 近似増加列 $\{D_n\}$



(2) 近似増加列 $\{D'_n\}$

- **12-2：広義重積分**

近似増加列を用いることで, 領域が非有界でない場合の重積分を考えることができるようになる.

【定義：広義重積分可能】

$z = f(x,y)$ は（非有界でも良い）領域 D 上で連続であるとする. D の **任意の近似増加列** $\{D_n\}$ に対して極限

$$S = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

が定まり, この S の値が **$\{D_n\}$ の取り方に依存しない** とき $z = f(x,y)$ は D 上で **広義積分可能** であると

いい,

$$S = \iint_D f(x, y)dxdy$$

と定義する．これを $z = f(x, y)$ の D における **広義積分** と呼ぶ．

例 12-2　次の重積分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

を求めてみよう．ただし, $z = e^{-x^2-y^2}$ は D 上で広義重積分可能であることは認める．

D は xy 平面の第 1 象限であり, これの近似増加列として, **例 12-1** の $\{D'_n\}$ をとる．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行えば, xy 平面の領域 D_n と $r\theta$ 平面の長方形領域

$$E_n = \left\{(r,\ \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq n,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

が対応する．

従って

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^n e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2})$$

である．ゆえに, $n \to \infty$ とすれば

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

となる．

レポート 12-1　次の D 上の広義積分を計算しなさい．

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x + y)^3}dxdy, \quad D = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \ y \geq 0\right\}$$

- **12-3 : ガウス積分**

1 変数の広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を **ガウス積分** と呼ぶ．これは統計で用いられる正規分布と関係が深い．平均が μ, 分散が σ^2 であるような正規分布の確率密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ で表される．ここで $X = \dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\sigma^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2}dX = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

なので,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

となるのである．そこで, ここでは 2 変数の広義重積分の考え方を用いてガウス積分の値 ① を計算してみよう．

求めるガウス積分を $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ とおくと, 被積分関数は偶関数なので

$$I = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$$

とかける．さて,

$$I_R = \int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

とおくと

$$I_R^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dxy\right) = \int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

となる．そこで長方形領域 $E_R = [0, R] \times [0, R]$ を考えれば

$$I_R^2 = \iint_{E_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

とかける．正の数 $r > 0$ に対して,

$$D_r = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\right\}$$

とおく．すると, $D_R \subset E_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ なので, $e^{-x^2-y^2} > 0$ より不等式

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{E_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

が成り立つ．ここで, $R \to \infty$ とすればはさみうちの原理および**例 12-2** から

$$I^2 = 4\lim_{R\to\infty} I_R^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

だから, $I > 0$ なので $I = \sqrt{\pi}$ であることがわかった.