2　偏導関数

• 2-1：2 変数関数の偏微分係数

多変数関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について，ある特定の変数 x_i 以外の変数に対して，$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n$ として定数を代入すれば，z は x_i を変数にもつ 1 変数関数となる．そこで，x_i による微分係数を考えることにより多変数の偏微分係数が定義される．まずは，一番簡単な 2 変数関数の場合から始めよう．

(I) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ において，$y = b$（一定）とすると，$z = f(x, b)$ は x の 1 変数関数である．この 1 変数関数の $x = a$ での微分係数を $z = f(x, y)$ の **点 (a, b) における x についての偏微分係数** と呼び，記号で $f_x(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ などと表す．つまり，$z = f(x, y)$ の点 (a, b) における x の偏微分係数は

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

で定義される．

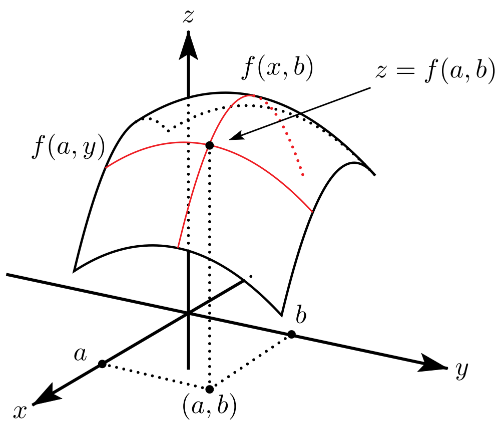
(II) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ において，$x = a$（一定）とすると，$z = f(a, y)$ は y の 1 変数関数である．この 1 変数関数の $y = b$ での微分係数を $z = f(x, y)$ の **点 (a, b) における y についての偏微分係数** と呼び，記号で $f_y(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ などと表す．つまり，$z = f(x, y)$ の点 (a, b) における y の偏微分係数は

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

で定義される．

関数 $z = f(x, y)$ の定義域 (a, b) において，偏微分係数 $f_x(a, b)$ が存在するとき，**点 (a, b) で x について偏微分可能**であるという．同様に，偏微分係数 $f_y(a, b)$ が存在するとき，**点 (a, b) で y について偏微分可能**であるという．

これらの偏微分係数の幾何的な意味を述べておこう．

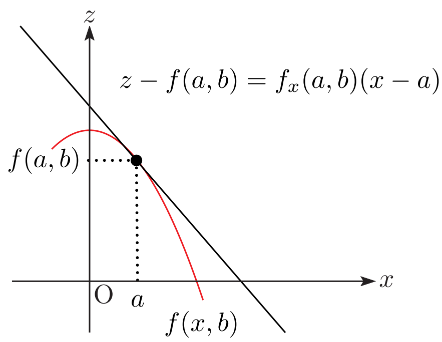


2 変数関数 $z = f(x, y)$ が右図のように xyz-空間内で曲面を描いているとする．$y = b$ として 1 変数関数 $z = f(x, b)$ を考えたとき，これは曲面上の曲線を表している．$g(x) = f(x, b)$ とおくと，この曲線 $z = g(x)$ のグラフを xz-平面に表したものが右下図である．

グラフ $z = g(x)$ の点 $x = a$ における接線を考えると，この接線の傾きは

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b)$$

となる．つまり，$f_x(a, b)$ は曲線 $z = g(x) = f(x, b)$ の点 $x = a$ での接線の傾きとなるのである．



同様にして $x = a$ として 1 変数関数 $z = f(a, y)$ を考えたとき，$h(x) = f(a, y)$ とおくと，グラフ $z = h(x)$ の点 $y = b$ における接線の傾きは

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(b + h) - g(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = f_y(a, b)$$

となる．つまり，$f_y(a, b)$ は曲線 $z = h(x) = f(a, y)$ の点 $y = b$ での接線の傾きとなるのである．

• 2-2： 偏導関数

2 変数の場合と同様に, 多変数関数 $z = f(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ における偏微分係数を定義しよう.

【定義：多変数関数の偏微分係数】

関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を含む集合 D を定義域とする n 変数関数とする. $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3, \ldots, x_n = a_n$ として, 変数を x_1 のみとするような 1 変数関数 $f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ が $x_1 = a_1$ で微分可能であるとき, すなわち極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が存在するとき, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は **点 $\boldsymbol{a}$ で x_1 に関して偏微分可能** であるという. このとき, 極限 ① を記号で $f_{x_1}(\boldsymbol{a})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})$ などと表し, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の **点 $\boldsymbol{a}$ における x_1 についての偏微分係数** という. 他の変数 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ についても同様に定める.

D を定義域とするような n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が, 定義域の任意の点 $\boldsymbol{a} \in D$ で x_1 に関して偏微分可能であるとき, 関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は **x_1 に関して偏微分可能** であるという. このとき, $\boldsymbol{a} \in D$ に対して, $f_{x_1}(\boldsymbol{a})$ を対応させる新たな n 変数関数が定義される. これを

$$z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

などと書いて, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の **x_1 に関する偏導関数** という. 他の変数 $x_2, x_3, \ldots, x_n$ についても同様に定める.

【定義：多変数関数が微分可能】

関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を含む集合 D を定義域とする n 変数関数とする. 点 $\boldsymbol{a} \in D$ において, 全ての変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関して偏微分可能であるとき, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は **点 $\boldsymbol{a}$ で偏微分可能** であるという. 定義域の任意の点 $\boldsymbol{a} \in D$ で偏微分可能であるとき, 関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は **偏微分可能** であるという.

偏導関数を計算するときは, **着目する変数以外は定数扱い** する. 例えば, x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を計算したければ, y を定数扱いして 1 変数関数のように微分をすればよい.

例 2-1　次の 2 変数関数の偏導関数を求めてみよう.

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$　　(2) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$　　(3) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(1) x に関する偏導関数は y を定数扱いして x で微分すればよい. また, y に関する偏導関数は x を定数扱いして y で微分すればよい. 従って

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

(2) 合成関数の微分法を用いて,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left((1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left((1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

(3) $(\tan^{-1}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ であったから

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

偏微分のときは記号の種類がいっぱいあって混乱しちゃいそう．
1 変数関数のときみたいに「ダッシュ」を使って $f'(x,y)$ って書いちゃだめなの?

偏微分のときは，「どの変数で偏微分したか」がとても大切だから
$f'(x,y)$ なんて書き方をすると減点されちゃうんだ．$f'(x,y)$ だと
どの変数で偏微分したかわからないから絶対に使っちゃダメだよ!

レポート 2-1　次の関数の偏導関数を求めなさい．また，点 $(1,1)$ における偏微分係数を求めなさい．

(1) $f(x,y) = x^2y$　　(2) $f(x,y) = (2x-3y)^3$　　(3) $f(x,y) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}y$

• 2-3： 高次偏導関数

2 変数関数 $z = f(x,y)$ が偏微分可能であるとする．偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が再び偏微分可能であるとき，$z = f(x,y)$ は **2 回偏微分可能** であるという．このとき，$f_x(x,y)$ の x および y の偏導関数と $f_y(x,y)$ の x および y の偏導関数の合計 4 つの偏導関数を考えることができる．

- $f_x(x,y)$ の x に関する偏導関数を

$$f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

  などで表す．

- $f_x(x,y)$ の y に関する偏導関数を

$$f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

  などで表す．（y の位置に注意しよう．）

- $f_y(x,y)$ の x に関する偏導関数を

$$f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

  などで表す．（x の位置に注意しよう．）

- $f_y(x,y)$ の y に関する偏導関数を

$$f_{yy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

  などで表す．

これらを $z = f(x, y)$ の **2 階の偏導関数** と呼ぶ．これらが偏微分可能であれば $z = f(x, y)$ は **3 回偏微分可能** であるといい，それぞれの偏導関数を考えることができる．このとき，全部で 8 個の偏導関数があり，それぞれ

$$
\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y), & f_{xxy}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y), \\
f_{xyx}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y), & f_{xyy}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y), \\
f_{yxx}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y), & f_{yxy}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y), \\
f_{yyx}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y), & f_{yyy}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y),
\end{aligned}
$$

で表す．これらを **3 階の偏導関数** と呼ぶ．以下同様にして **k 回偏微分可能** や **k 階の偏導関数** といった概念が定義される．また，一般の n 変数関数に対しても同様に k 回偏微分可能や k 階の偏導関数といった概念が定義される．

例 2-2　次の 2 変数関数の 2 階偏導関数を全て求める．

$$f(x, y) = \log(x^2 + y)$$

まず，1 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y}$$

であるから，2 階偏導関数は

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y)^2} = \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}, \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{-2x}{(x^2+y)^2}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}, \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{-1}{(x^2+y)^2}
\end{aligned}
$$

上の例のように，$f_{xy}(x, y) = f_{yx}$ だと計算上の都合がよいが，これは一般には成り立たない．では，これはいつ成り立つのだろうか．

> **【定義：C^k 級関数】**
> 関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が k 回偏微分可能で，k 階までの偏導関数がすべて連続であるとき，$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は **C^k 級** であるという．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が C^k 級であるとき，**C^∞ 級** であるという．

このとき，次の有用な定理が成り立つ．

定理 2.1 (偏微分の順序交換)**.** 関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が C^k 級であるとき，k 階までの偏導関数は偏微分の順序によらない．特に，2 変数関数 $z = f(x, y)$ が C^2 級であるときは $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ が成り立つ．

レポート 2-2　2 変数関数 $z = f(x, y)$ が以下で定義されていたとする．

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}
$$

について，$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ であることを示せ．