3　全微分

● 3-1：全微分を導入する動機

偏微分とは, ある変数以外ををすべて定数だとみなして 1 変数の関数として捉えたときの微分のことであった. 従って, 偏微分は, ある 1 つの変数についての変化の度合いを記述する. 例えば, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について, x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ は y を固定したとき, x を少しだけ変化させたとき z はどれくらい増減するかの度合いを表していた.

しかし, 多変数関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ はすべての変数が自由自在に動いている. このとき, すべての変数を少しだけ変化させたとき, z はどれくらい増減するかの度合いを表すにはどうすればよいだろうか.

1 変数関数 $y = f(x)$ の場合を復習しながら考察しよう. このとき, 点 a での微分係数の定義は

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であった. これを 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合に拡張して, 点 (a, b) での微分係数は次の式でよいだろうか.

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b)}{(h_1, h_2)}$$

しかし, この式はある実数 $f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b)$ をベクトル $\vec{h} = (h_1, h_2)$ で割るという意味不明な式になっている. そこで, 式 ① をそのまま一般化するのではなく, 少し工夫が必要になる.

● 3-2：ランダウの記号 $o(f(\boldsymbol{x}))$

式 ① は次の式と同値である.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

これは, 分子の $f(a+h) - f(a) - hf'(a)$ と分母の h が $h \to 0$ としたときにだいたい同じ速度で収束していることを意味している. そこで次の記号を導入しよう.

【定義：ランダウの記号 $o(f(\boldsymbol{x}))$】

2 つの n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を考える. 等式

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n) \to (a_1,\ldots,a_n)} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} = 0$$

が成り立つとき,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = o(g(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n))$$

とかく. この o を **ランダウの記号** といい, スモールオーと読む.

ランダウの記号を使えば

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \iff f(a+h) - f(a) - hf'(a) = o(h)$$
$$\iff f(a+h) - f(a) = hf'(a) + o(|h|)$$

となる. ここで, 最後に絶対値がついたのは, $h \to 0$ と $|h| \to 0$ が同値だからである.

例 3-1

例 1-2 より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$ だったから, $x^3-y^3 = o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0))$ である.

例 3-2

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0$ だから

$$x^2 = o(x) \quad (x\to 0), \quad x^3 = o(x) \quad (x\to 0)$$

である.

ランダウの記号は, あくまで収束する速さの度合いを表しているだけ!
だから, 普通の「=」とは意味が違うことに気をつけてね.
例えば, $x^2 = o(x) \quad (x\to 0), \quad x^3 = o(x) \quad (x\to 0)$ だからといって

$$x^2 = o(x) = x^3$$

なんてしないようにしてね. だって, x^2 と x^3 は同じではないでしょ!

レポート 3-1　$\tan^{-1}(x) = x + o(x^2) \quad (x \longrightarrow 0)$ を示せ.

- **3-3 : 2 変数関数の全微分**

1 変数関数のときは,

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + o(|h|)$$

によって微分係数を考えることができた. ここで, 最後の $|h|$ は数直線上の 0 から h までの距離であったので, 2 変数関数の場合もランダウの記号の中身は xy-平面の原点と (h_1, h_2) との距離を用いればよさそうである.

【定義 : 2 変数関数の全微分】

$z = f(x,y)$ は点 (a,b) とその近くで定義されているとする. このとき,

$$f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) = h_1c_1 + h_2c_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となるような定数 c_1, c_2 が存在するとき **点 (a,b) で全微分可能** であるという. $z = f(x,y)$ の定義域の任意の点で全微分可能であるとき, 単に **全微分可能** であるという.

定理 3.1. $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能であるとする. $z = f(x,y)$ は偏微分可能で, ② において

$$c_1 = f_x(a,b), \quad c_2 = f_y(a,b)$$

が成り立つ.

証明. 式 ② において, $h_2 = 0$ とすると

$$f(a+h_1, b) - f(a,b) = h_1c_1 + o(|h_1|)$$

である. ランダウの記号の定義により

$$c_1 = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(a+h_1,b) - f(a,b)}{|h_1|} = f_x(a,b).$$

同様に, 式 ② において, $h_1 = 0$ とすると $c_2 = f_y(a,b)$ を得る. □

以上より, 式 ② は

$$f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) = f_x(a,b)h_1 + f_y(a,b)h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

と書き換えることができる．右辺は z の増加量 Δz であり, 左辺では h_1 が x の増加量 Δx, h_2 が y の増加量 Δy なので形式的に

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

とかける．よって, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ として微小の変化量をみることにすれば,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

とかける．これを z の **全微分** と呼ぶ.

定理 3.2. $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能であるとする．このとき, $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である.

証明. 示すことは, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ である．つまり, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) - f(a,b)\} = 0$ を示ば良い. $h_1 = x-a$, $h_2 = y-b$ とおくと, $z = f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能なので

$$f(x,y) - f(a,b) = f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) = c_1h_1 + c_2h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

である．よって,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) - f(a,b)\} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} c_1h_1 + c_2h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right) \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} c_1h_1 + c_2h_2 + \frac{o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \sqrt{h_1^2+h_2^2} \\
&= 0 + 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

従って, $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である. □

- **3-4 : 接平面**

全微分の式の幾何的な意味を調べてみよう．2 変数関数 $z = f(x,y)$ を $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ とその周辺で定義されているとする．このとき,

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

は xyz-空間内の曲面を表している．上の式をベクトルの内積を使うように変形すると

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \iff (f_x(a,b), f_y(a,b), -1)\cdot(x-a, y-b, z-f(a,b)) = 0$$

であるから, 2 つのベクトル $(x-a, y-b, z-f(a,b))$ と $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ は垂直である．つまり, 曲面 ③ は点 $(a,b,f(a,b))$ を通り $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ に直交する平面を表している.

【定義：接平面】

$z = f(x,y)$ は点 (a,b) とその近くで定義されているとする．このとき,

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で定義されている曲面を $z = f(x,y)$ の点 (a,b) における **接平面** と呼ぶ.

例 3-3　$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ のとき, これの全微分は

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx + \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$$

である. また, 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式は

$$z - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

である. これを計算すると

$$z - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{-1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

である.

レポート 3-2　次の関数の全微分を求め, 点 $(1,1)$ における接平面を求めなさい.

(1) $z = \log\sqrt{1+x^2+y^2}$　　(2) $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$