5　2 変数関数の Taylor の定理

• 5-1： 合成関数の高階導関数

1 変数関数の Taylor の定理と連鎖律を使うことで, 多変数関数の Taylor の定理を示すことができる．そのために, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ に関して, $x = x(t)$, $y = y(t)$ であるとして z を t の関数だと思った時の高階導関数を求めておこう．

$x = f(x, y)$ は点 (a, b) とその周辺で定義された C^n 級関数 $(n \geq 2)$ とする．h, k は固定された定数であるとする．このとき,

$$g(t) = f(a + ht, b + kt)$$

は $t = 0$ とその周辺で定義されているとする．このとき, 連鎖律（**定理 4.2**）によって

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt)$$

である．f_x, f_y は再び全微分可能だから, もう一度, 連鎖律を用いると

$$\frac{d^2g}{dt^2} = h(hf_{xx}(a + ht, b + kt) + kf_{xy}(a + ht, b + kt)) + k(hf_{yx}(a + ht, b + kt) + kf_{yy}(a + ht, b + kt))$$

であり．**定理 2.1** から $f_{xy} = f_{yx}$ なので

$$\frac{d^2g}{dt^2} = h^2 f_{xx}(a + ht, b + kt) + 2hkf_{xy}(a + ht, b + kt)) + k^2 f_{yy}(a + ht, b + kt))$$

上式を形式的に

$$\begin{aligned}\frac{d^2g}{dt^2} &= \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(a + ht, b + kt) \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a + ht, b + kt)\end{aligned}$$

$\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ は
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
の右辺とそっくりだね.

以下, 同様に計算を続けると

$$\frac{d^n g}{dt^n} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} h^{n-i}k^i \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\partial y^i} f(a + ht, b + kt) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a + ht, b + kt)$$

となることがわかる．このとき,

$$\binom{n}{i} = {}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{i!(n - i)!}$$

である．

レポート 5-1　連鎖律を用いて $\dfrac{d^3g}{dt^3} = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a + ht, b + kt)$ を証明しなさい．

• 5-2： 2 変数関数の Taylor の定理

まずは, 1 変数関数のときの Taylor の定理を思い出そう．

$y = f(x)$ が開区間 (a, b) において n 回微分可能で, 閉区間 $[a, b]$ で連続とする．このとき, $c \in (a, b)$ で次の式を満たすものが存在する．

$$\begin{aligned}&f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} + R_n, \\ &R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - a)^n\end{aligned}$$

このとき, c は $x=a$ と $x=b$ を結ぶ線分の内点だから, $a<c<b$ となる c が存在することと $c=b+\theta(b-a)$ となるような $0<\theta<1$ がとれることは同値である.

C^n 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と, 定数 h,k に対して 1 変数関数 $g(t)=f(a+th,b+tk)$ に Taylor の定理を適用すると次の結果を得る.

定理 5.1 (Taylor の定理)**.** $z=f(x,y)$ は点 (a,b) とその周辺で定義されている C^n 級関数とする. $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ を固定しておき, (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が z の定義域内に含まれていると仮定する. このとき, $0<\theta<1$ となる θ が存在して以下の式を満たす.

$$f(a+h,b+k)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\ell}f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a+\theta h,b+\theta k)$$

証明. $g(t)=f(a+th,b+tk)$ を開区間 $(0,1)$ において Taylor の定理を適用すると, ある $0<\theta<1$ となる θ が存在して

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=g(1)&=g(0)+\frac{g^{(1)}(0)}{1!}+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{g^{(n)}(\theta)}{n!}\\&=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\ell}f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a+\theta h,b+\theta k)\end{aligned}$$

を満たす. これは示したい等式そのものであった. □

$n=1$ における Taylor の定理を**平均値の定理**と呼ぶ. つまり, 2 変数の平均値の定理とは次の主張である. $z=f(x,y)$ は点 (a,b) とその周辺で定義されている C^1 級関数とする. $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ を固定しておき, (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が z の定義域内に含まれていると仮定する. このとき, $0<\theta<1$ となる θ が存在して以下の式を満たす.

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+\theta h,b+\theta k)$$

ところで, Taylor の定理の式で, $(a,b)=(0,0)$ を代入すれば

$$f(h,k)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\ell}f(0,0)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(\theta h,\theta k)$$

である. 変数を書き換えて

$$f(x,y)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\ell}f(0,0)+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(\theta x,\theta y)$$

となるが, これを $z=f(x,y)$ の n 次までの**有限 Maclaurin 展開**という.

例 5-1　$f(x,y)=e^{2x+3y}$ のとき, これを 2 次まで有限 Maclaurin 展開したものを計算してみよう.

$$\begin{aligned}&f_x(x,y)=2e^{2x+3y},\quad f_y(x,y)=3e^{2x+3y},\quad f_{xx}(x,y)=4e^{2x+3y},\\&f_{xy}(x,y)=6e^{2x+3y},\quad f_{yx}(x,y)=6e^{2x+3y},\quad f_{yy}(x,y)=9e^{2x+3y}\end{aligned}$$

であるから, 次のようになる.

$$f(x,y)=1+2x+3y+\frac{1}{2}(4x^2+12xy+9y^2)e^{(2x+3y)\theta}\quad(\text{ただし}, 0<\theta<1)$$

レポート 5-2　関数 $z=e^x\cos y$ を 3 次まで有限 Maclaurin 展開せよ.