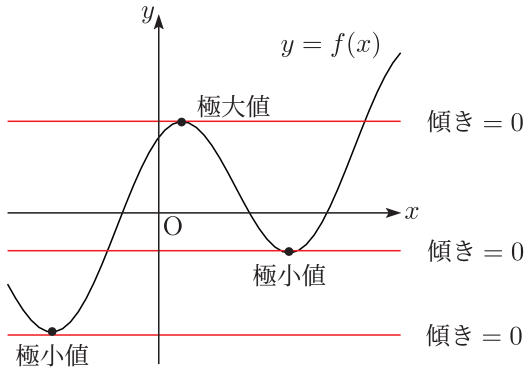
6　多変数関数の極大・極小

- **6-1 : 多変数関数の極値**

1 変数関数 $y = f(x)$ の極値のについて思い出そう．極大とは, グラフで言えば **「上昇から下降に転じるところ」** であり, 極小とは **「下降から上昇に転じるところ」** である．つまり, $y = f(x)$ が点 $x = a$ で極値をとることを次のように定義していたのであった．



- $x = a$ の十分近い任意の x' に対して, $f(x') < f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $y = f(x)$ の**極大値**という．
- $x = a$ の十分近い任意の x' に対して, $f(x') > f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $y = f(x)$ の**極小値**という．

これを多変数関数の場合に一般化しよう．

【定義：多変数関数の極値】

関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ を含む集合 D を定義域とする n 変数関数とする．$\boldsymbol{a}$ の十分近くの任意の点 $\boldsymbol{x} \in D$ に対して,

- $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$ となるとき, $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で**極大**となるといい, $f(\boldsymbol{a})$ を**極大値**という．
- $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$ となるとき, $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ で**極小**となるといい, $f(\boldsymbol{a})$ を**極小値**という．

定理 6.1. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であり, 点 (a, b) で極値をとるとする．このとき, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立つ．このような点 (a, b) を **停留点** という．

証明. $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で極大であるとしよう．極大値の定義から, 十分小さい $h > 0$ に対して

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0, \quad \frac{f(a-h, b) - f(a, b)}{-h} \geq 0$$

が成り立つ．すると, $h \to 0+$ とすれば

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0, \quad f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h, b) - f(a, b)}{-h} \geq 0$$

が同時に成り立つので $f_x(a, b) = 0$ である．同様にして $f_y(a, b) = 0$ も成り立つ．
点 (a, b) で極小値をとる場合も同じ論法で証明できる．　□

この定理によって, **極値をとる点の候補は, 偏微分係数が 0 のところ** であることはわかる．つまり, 偏微分係数が 0 であることは, その点で極値をとるための十分条件である．

では, その点で極大であるか極小であるか, それとも極値をとらないのかを判定するための定理を述べよう．

定理 6.2. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が C^2 級であり, 点 (a, b) で $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立つとする．

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b)$$

とおく．このとき次が成り立つ．

(1) $B^2 - AC < 0$ かつ $A > 0$ ならば, $f(a, b)$ は極小値である．

(2) $B^2 - AC < 0$ かつ $A < 0$ ならば, $f(a,b)$ は極大値である.

(3) $B^2 - AC > 0$ ならば, $f(a,b)$ は極値ではない. このような点を**鞍点**と呼ぶ.

証明. まず, $z = f(x,y)$ を点 (a,b) まわりで Taylor の定理を適用すれば, ある $0 < \theta < 1$ で次の式を満たすものが存在する.

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k) \\ &= f(a,b) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

ここで,

$$A' = f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k), \quad B' = f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k), \quad C' = f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)$$

とおくと

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(A'h^2 + 2B'hk + C'k^2)$$

従って $A' \neq 0$ とすれば,

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2A'}\{(A'h^2 + B'k)^2 + k^2(A'C' - B'^2)\}$$

さて, $B^2 - AC < 0$ であると仮定すると, $z = f(x,y)$ は C^2 級なので, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} は連続であるから十分小さい h, k に対して $B'^2 - A'C' < 0$ とできる. 同様に, $A > 0$ なら $A' > 0$ としてもよく, $A < 0$ なら $A' < 0$ としてもよい. すると, $A > 0$（または $A < 0$）なら,

$$f(a+h,b+k) \geq f(a,b) \quad （または\ f(a+h,b+k) \leq f(a,b)\ ）$$

となるので, 点 (a,b) で極小（または極大）となる. また, $B^2 - AC > 0$ のときは極大にも極小にもならない. 以上で主張が示された. □

注意として, もし, **$B^2 - AC = 0$ のときは, この方法では判定できない**ので個別に議論する必要がある.

例 6-1　例えば, $z = x^4 + y^4 - (x+y)^2$ とすれば, $z_x = 0$, $z_y = 0$ とおくと $(x,y) = (0,0), (1,1), (-1,-1)$ となる. ここで,

$$z_{xx} = 12x^2 - 2, \quad z_{xy} = -2, \quad z_{yy} = 12y^2 - 2$$

なので, これらに $(x,y) = (0,0)$ を代入したものをそれぞれ A, B, C とおくと $B^2 - AC = 0$ となる.

しかし, $y = -x$ で $x \neq 0$ とすれば $z = 2x^4 > 0$ であり, $y = 0$, $x \neq 0$ で x が十分小さいとすれば $z = x^4 - x^2 < 0$ となるので, 点 $(0,0)$ では極値を持たない.

レポート 6-1　次の関数の極値を求めよ.

(1) $z = 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 4y + 8$　　(2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 1$