# 7 Lagrange の未定乗数法

- **7-1：陰関数とその導関数**

世の中にある様々な現象を扱う時, 扱う式がいつでも $y = \cdots$ や $z = \cdots$ という形のものばかりではない. 例えば, 原点が中心で半径が 1 の円は $x^2 + y^2 = 1$ で表される. このような関数を扱うとき, 陰関数という概念が必要になる.

**【定義：陰関数】**

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $y$ を変数にもつ $(n+1)$ 変数関数 $z = f(\boldsymbol{x}, y)$ をとる. このとき, $y = \varphi(\boldsymbol{x})$ という $n$ 変数関数であって $f(\boldsymbol{x}, \varphi(x)) = 0$ が成り立つとき, $y = \varphi(\boldsymbol{x})$ を $z$ の **陰関数** と呼ぶ.

**例 7-1**　原点が中心で半径が 1 の円 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ を考える. 関数 $z = x^2 + y^2 - 1$ とおけば,

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

は $z$ の陰関数である. $x = \pm 1$ のときは $y = 0$ なので $\dfrac{dy}{dx} = 0$ である. $x \neq \pm 1$ のときは

$$\begin{aligned} y = \sqrt{1 - x^2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} \\ y = -\sqrt{1 - x^2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

だから, いずれにしても $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ であることがわかった.

では, **陰関数を求めてからそれを微分するのではなく, 元の関数から直接求める方法はないか？** を考えよう. つまり, $f(x, y) = 0$ に対して, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたいとする. このとき, 両辺を $x$ で偏微分すると右辺は 0 であって, 左辺は連鎖律より

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x(x, y) + f_y(x, y)\frac{dy}{dx}$$

だから

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

が成り立つ. よって, もし $f_y(x, y) \neq 0$ であれば

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

が成り立つことがわかった. 以上のことを定理としてまとめておこう.

**定理 7.1** (陰関数定理). 関数 $z = f(x, y)$ は点 $(a, b)$ とその周辺で定義されている $C^1$ 級関数として, $f_y(a, b) \neq 0$ とする. このとき, $f(x, y) - f(a, b) = 0$ は点 $(a, b)$ の近くで陰関数 $y = \varphi(x)$ をもち, 点 $x = a$ の近くで

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

となる.

**レポート 7-1**　$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ となるような点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ.

(2) $f(a, b) = 0$ で $f_y(a, b) \neq 0$ とするような点 $(a, b)$ に対して, $b = \varphi(a)$ を満たす $f(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ を $x$ で微分せよ.

**• 7-2 : 条件付き極値問題**

陰関数定理によると, $z=f(x,y)$ の定義域内の点 $(a,b)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ であれば, 点 $(a,b)$ まわりで $y=\varphi(x)$ の $x$ での微分は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

とできる. これを応用して, $g(x,y)=0$ という条件下で $z=f(x,y)$ の極値を調べてみよう.

そのために, 記号をひとつ準備する. $n$ を自然数とする.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

とおき, これを **ナブラ演算子** と呼ぶ. $n$ 変数関数 $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ に対して, 定義域内の点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ における $f$ の **勾配** $\nabla f(\boldsymbol{a})=$ を

$$\nabla f(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$$

と定める.

**定理 7.2** (Lagrange の未定乗数法)**.** 2 つの 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ は $C^1$ 級であるとする. このとき, $g(x,y)=0$ の下で $z=f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で極値をもつならば, 次のいずれかが成り立つ.

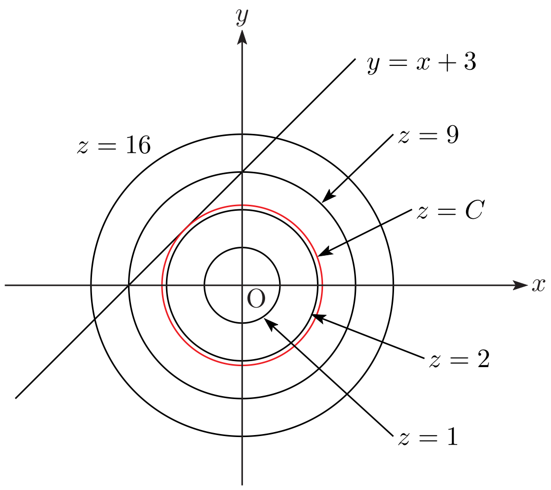
(1) $\nabla g(a,b)=0$ かつ $g(a,b)=0$ である.
(2) ある $\lambda\in\mathbb{R}$ で $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$ かつ $g(a,b)=0$ である.

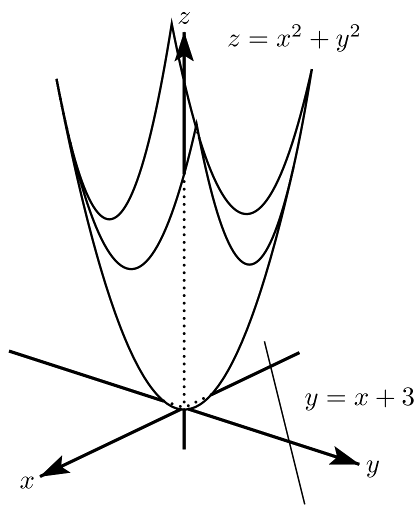
(1) を満たすときような点 $(a,b)$ を $g(x,y)$ の **特異点** と呼び, (2) を満たす $\lambda$ を **Lagrange の未定乗数** と呼ぶ.

証明は陰関数定理の応用であり, それほど難しくないがここでは具体例を通して現象を理解しよう.

**例 7-2**　$x-y+3=0$ 上で $z=x^2+y^2$ の極値を求めよう.

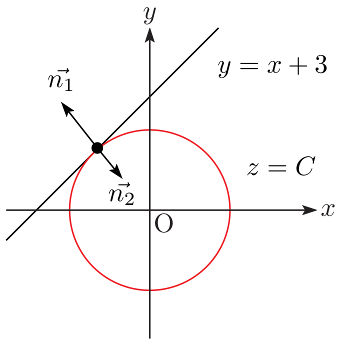
$y=x+3$ を満たす定義域内の $(x,y)\mathbb{R}^2$ における極大・極小を求める問題だが, どのように考えれば良いだろうか. 状況を考察するために, 右の図を上から見下ろしてみよう. このとき, $z$ の等高線 $z=1$, $z=2,\ldots$ と $y=x+3$ の位置関係を下の図は表している. このとき, $y=x+3$ と $z=C$ の等高線が接しているとしよう.



すると, 次のことに気づく.

- $z = C$ の内部では $z = x^2 + y^2 < C$ である.
- $z = C$ の外部では $z = x^2 + y^2 > C$ である.




つまり, $z = C$ の等高線は, $xy$ 平面を $z = C$ より大きい部分と小さい部分に分けている. 従って, $y = x + 3$ と $z = C$ の等高線の接点を $(a, b)$ とおけば, 点 $(a, b)$ では $z = C$ であり, それ以外では $z \geq C$ となっているから, $(a, b)$ で $z = x^2 + y^2$ は $y = x + 3$ の条件の下で極小になっている. では, どのようにして接点 $(a, b)$ と $z = C$ の値を求めればよいだろうか.

右図のように, 点 $(a, b)$ における $x - y + 3 = 0$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$ と, $x^2 + y^2 - C = 0$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_2}$ をとる. すると, 2 つのベクトル $\overrightarrow{n_1}$ と $\overrightarrow{n_2}$ は平行なので, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ で

$$\lambda \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2}$$

とできる. ここで, 2 つのベクトル $\overrightarrow{n_1}$ と $\overrightarrow{n_2}$ を求めてみよう.

$z = C$ を変形すれば, $x^2 + y^2 - C = 0$ なので, $f(x, y) = x^2 + y^2 - C$ とおくと, 点 $(a, b)$ における接平面は

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad \Longleftrightarrow \quad z = 2a(x - a) + 2b(y - b)$$

である. $z = 0$ で考えれば, $2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$ である. よって, $x - y + 3 = 0$ に対する法線ベクトルは

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (= \nabla g(a, b)), \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} (= \nabla f(a, b))$$

ととることができる. よって $2a = \lambda$, $2b = -\lambda$ だから $a = -b$ であり, 点 $(a, b)$ は $y = x + 3$ 上の点だから $b = a + 3$ である. 以上より, $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ であり, $\lambda = 3$ である.

以上より, 点 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ で $z = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ を極小値をもつ.

この例でわかったことは, **制約条件と目的関数の等高線が接する場所で極値をとり得る.**

Lagrange の未定乗数法において, 実際に極値を持つかどうかを判定するのは更なる考察が必要である.

**【定義：$\mathbb{R}^2$ のコンパクト集合】**

$\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 $D$ が, ある正の数 $r > 0$ が存在して, 任意の $x = (x_1, x_2) \in D$ に対して $\sqrt{x^2 + y^2} \leq r$ とできるとき, $D$ は **有界** であるという. また, $D$ の要素からなる収束する列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ があったとき, 極限 $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$ が $D$ の要素になるとき $D$ を **閉集合** と呼ぶ. $\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合を **コンパクト集合** と呼ぶ.

$n$ 変数多項式 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して, 集合 $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0\}$ は閉集合であることが知られている. よって, 有界かであることがわかればコンパクト集合となる.

証明はしないが, 実際には次の定理が有効である.

**定理 7.3** (Weierstrass の定理)**.** 定義域がコンパクト集合であるような連続関数は, その定義域内で最大値・最小値を持つ.

**レポート 7-2**　$x^2 + y^2 = 1$ の下で, $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ の最大値および最小値を求めよ. ただし, 集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ はコンパクト集合である.

- **7-3 : Lagrange の未定乗数法の定理の証明（参考）**

主張を再記しておこう.

2 つの 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ は $C^1$ 級であるとする. このとき, $g(x,y)=0$ の下で $z=f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で極値をもつならば, 次のいずれかが成り立つ.

(1) $\nabla g(a,b)=0$ かつ $g(a,b)=0$ である.
(2) ある $\lambda\in\mathbb{R}$ で $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$ かつ $g(a,b)=0$ である.

**証明.** (1) が満たされない時に (2) を満たすことを示せば良い.

点 $(a,b)$ で $z=f(x,y)$ が極値を持ったと仮定して, $\nabla g(a,b)\neq 0$ または $g(a,b)\neq 0$ であると仮定する. 今, $g(a,b)=0$ なので, $\nabla g(a,b)\neq 0$ である. このとき, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ と仮定しても一般性を失わない. すると, 陰関数定理から点 $(a,b)$ の十分近くで $y=\varphi(x)$ となるような $g(x,y)=0$ の陰関数が存在する. 点 $(a,b)$ の十分近くで $z=f(x,\varphi(x))$ であり, 点 $(a,b)$ で極値をとる. すると, 連鎖律と陰関数定理より

$$0=z_x=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right)$$

となる. これに $x=a$ を代入すれば $\varphi(a)=b$ なので

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

となる. そこで,

$$\lambda=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$$

とおくと,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=0$$

である. この $\lambda$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0.$$

すなわち, $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$ かつ $g(a,b)=0$ である. □