8　2 変数関数の重積分

- **8-1 : 長方形領域上の 2 重積分**

1 変数関数の区分求積法の考え方に倣って, 長方形領域で定義された 2 変数関数の積分を考えよう.

まず, 4 つの実数 a, b, c, d で $a < c$, $b < d$ を満たとする. このとき, $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq c,\ b \leq y \leq d\}$$

を **長方形領域** とよび, 記号で $[a, c] \times [b, d]$ で表す.

2 変数関数 $z = f(x, y)$ は長方形領域 $E = [a, c] \times [b, d]$ 上で定義された関数であるとする. このとき, 長方形領域 E をいくつかの細かい小長方形に分割する. そのために, x 軸と y 軸に分点

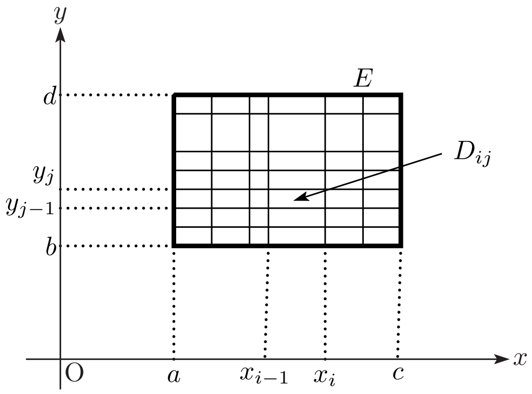
$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_L = c, \quad b = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = d$$

をとり, 直線

$$x = x_0, \quad x = x_1, \quad \ldots, \quad x = x_L, \quad y = y_1, \qquad y = y_2, \quad \ldots, \quad y = y_N$$

を引く. 4 つの直線 $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{j-1}$, $y = y_j$ によって囲まれた長方形を D_{ij} とおいて, LN 個の小長方形によって領域 E を分割する. この LN 個の長方形のうち, 最大の長さのものを $|\Delta|$ とおこう. すなわち

$$|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1},\ y_j - y_{j-1} \mid 1 \leq i \leq L,\ 1 \leq j \leq N\}$$



このとき, 小長方形 D_{ij} の面積を S_{ij} としよう. つまり

$$S_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

である. 各小長方形 D_{ij} から任意に点 (x_{ij}, y_{ij}) をとり, 次の和を取ることにしよう.

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij}) S_{ij}$$

このとき, ある実数 A があって, **分割 Δ や点 (x_{ij}, y_{ij}) の取り方に依存せずに** $|\Delta| \to 0$ としたとき

$$S(f, \Delta) \longrightarrow A$$

となるとき, **$f(x, y)$ は E 上で重積分が存在する** といい, この実数 A を $f(x.y)$ の E 上の **(2) 重積分** といい

$$A = \iint_E f(x, y)dxdy$$

とかく.

次の主張は, 重積分の存在が保証される最も簡単な場合ある.

定理 8.1. 関数 $z = f(x, y)$ が長方形領域 E 上で連続ならば, E 上の重積分 $\displaystyle\iint_E f(x, y)dxdy$ が存在する.

1 変数のときと同様に, 重積分は線形性をもつ.

定理 8.2. 関数 $z = f(x, y)$ および $z = g(x, y)$ は長方形領域 E 上で重積分が存在するとする. このとき次が成り立つ.

(1) 実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\iint_E cf(x, y)dxdy = c\iint_E f(x, y)dxdy.$

(2) $\displaystyle\iint_E \{f(x, y) \pm g(x, y)\}dxdy = \iint_E f(x, y)dxdy \pm \iint_E g(x, y)dxdy$ （複号同順）.

証明. 重積分の定義に従って計算すれば良い.

(1) Δ を長方形領域 E の分割とする. このとき,

$$\iint_E cf(x, y)dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} cf(x_{ij}, y_{ij})S_{ij} = c\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij})S_{ij} = c\iint_E f(x, y)dxdy$$

(2) Δ を長方形領域 E の分割とする. このとき,

$$\begin{aligned}\iint_E \{f(x, y) \pm g(x, y)\}dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N}\{f(x_{ij}, y_{ij}) \pm g(x_{ij}, y_{ij})\}S_{ij}\\ &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij})S_{ij} \pm \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} g(x_{ij}, y_{ij})S_{ij}\\ &= \iint_E f(x, y)dxdy \pm \iint_E g(x, y)dxdy\end{aligned}$$

以上で主張が示された. □

定理 8.3. 関数 $z = f(x, y)$ は長方形領域 $E = [a, c] \times [b, d]$ 上で重積分が存在するとし, E は 2 つの長方形 E_1 と E_2 に分割されているとする. このとき,

$$\iint_E f(x, y)dxdy = \iint_{E_1} f(x, y)dxdy + \iint_{E_2} f(x, y)dxdy$$

が成り立つ.

証明. 長方形 $E = [a, c] \times [b, d]$ とする. これを縦に 2 つに割り, $a < p < c$ をとって

$$E_1 = [a, p] \times [b, d], \quad E_2 = [p, c] \times [b, d]$$

である場合のみ示す. 横に 2 分割した場合も同様である. 長方形領域 E の分割 Δ を

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_s = p < x_{s+1} < \cdots < x_L = c, \quad b = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = d$$

のようにとれば,

$$\begin{aligned}\iint_E f(x, y)dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij})S_{ij} &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij})S_{ij} + \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=s+1}^{L}\sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}, y_{ij})S_{ij}\\ &= \iint_{E_1} f(x, y)dxdy + \iint_{E_2} f(x, y)dxdy\end{aligned}$$

以上で主張が示された. □

レポート 8-1　**定理 8.3** において, 長方形 E を横に 2 分割した場合の証明を与えよ.

- **8-2 : 有界領域上の 2 重積分**

一般の有界集合 D で定義された関数 $z = f(x, y)$ の重積分を定義しよう.

【定義：重積分可能】

$z = f(x, y)$ を領域 D 上で定義された関数とする. 領域 D は有界集合であると仮定して, 領域 D は長方形領域 E に含まれているとする. ここで関数 $\widetilde{f}(x, y)$ を

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in E \setminus D \end{cases}$$

で定義する. このとき, 重積分 $\iint_E \widetilde{f}(x, y)dxdy$ が存在するとき, $f(x, y)$ は **D 上で重積分可能** であるといい,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E \widetilde{f}(x, y)dxdy$$

で定義する. この値を **D 上の重積分** と呼ぶ.

この定義において, $D \subset E$ となる長方形領域 E は取り方が色々あるが, E の取り方に寄らないことが保証されている. 証明は, 本講義のレベルを超えているので, ここでは割愛する.

例 8-1　重積分の定義に従って, 次の積分を計算しよう:

$$\iint_E (3x - 2y)dxdy, \quad E = [0, 1] \times [0, 1]$$

まず, 関数 $f(x, y) = 3x - 2y$ は長方形領域 E 上で連続なので, E 上の重積分は存在する. そこで, x 軸上の区間 $[0, 1]$ および y 軸上の区間 $[0, 1]$ をそれぞれ L 等分, N 等分する. この分割を Δ とおこう. つまり, Δ は

$$\Delta : \begin{cases} 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_L = 1, \quad x_i = \dfrac{i}{L}, \quad i = 0, 1, \ldots, L, \\ 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = 1, \quad y_j = \dfrac{j}{N}, \quad j = 0, 1, \ldots, N \end{cases}$$

であるような分割である. 各小長方形 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 上の点として (x_i, y_j) をとると,

$$\begin{aligned} \iint_E (3x - 2y)dxdy &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{N} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{3i}{L} - \frac{2j}{N} \right) \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{N} \\ &= \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{L^2 N^2} \cdot \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{N} (3iN - 2jL) \\ &= \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{L^2 N^2} \cdot \left(3N \cdot \frac{L(L+1)}{2} \cdot N - 2L \cdot \frac{N(N+1)}{2} \cdot L \right) \\ &= \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{1}{L^2 N^2} \cdot \frac{3N^2 L(L+1) - 2L^2 N(N+1)}{2} \\ &= \lim_{L, N \to \infty} \frac{3N^2 L^2 + 3N^2 L - 2L^2 N^2 + 2L^2 N}{2L^2 N^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

レポート 8-2　重積分の定義に従って, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_E xydxdy, \quad E = [0, 1] \times [0, 1]$$