9　累次積分

• 9-1：累次積分

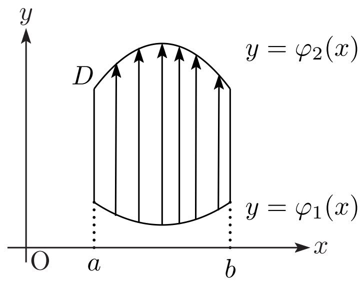
領域 D で重積分が可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ があったとき, これを定義通り計算するのは困難を極める. しかし, 領域 D が「縦線領域」あるいは「横線領域」と呼ばれるもののときは「累次積分」とよばれる方法で計算できる.

(I) **まず y で積分して, その後 x で積分するケース**

- 領域 D が **縦線領域** のとき. つまり, 曲線 $y = \varphi_1(x)$ と $y = \varphi_2(x)$ を用いて

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

であるとき.



- 計算の仕方

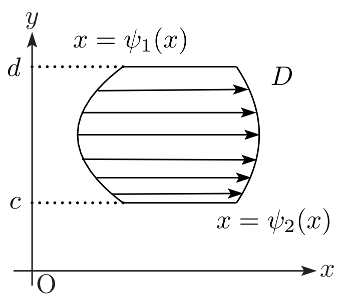
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy \right\} dx$$

(II) **まず x で積分して, その後 y で積分するケース**

- 領域 D が **横線領域** のとき. つまり, 曲線 $x = \psi_1(y)$ と $y = \psi_2(y)$ を用いて

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

であるとき.



- 計算の仕方

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,\ y)dx \right\} dy$$

累次積分の考え方を簡単に述べておこう. 例えば, 領域 D が横線領域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

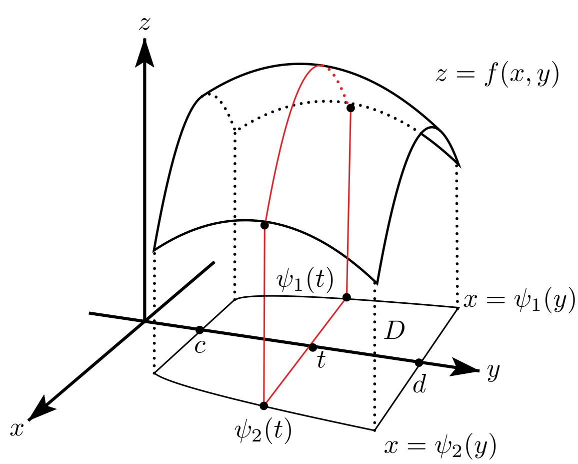
のとき,

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx$$

というのは, ある y 軸に垂直な平面で $z = f(x, y)$ と $z = 0$ を囲む立体を切った断面積に相当しており, この断面積を c から d まで厚みを持たせたものが

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,\ y)dx \right\} dy$$

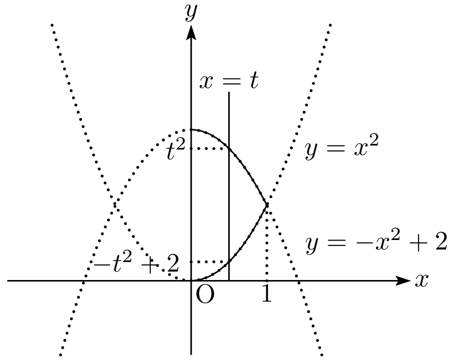
である.



例 9-1 以下の重積分を計算しよう.

$$\iint_D xe^y dxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq -x^2+2\right\}$$

右図は, 領域 D を $\mathbb{R}^2$ 平面に図示したものである. 領域 D は縦線集合であるから, 求める重積分は

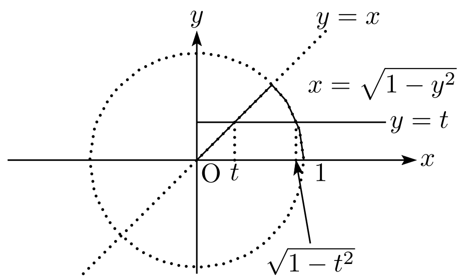


$$\begin{aligned}
\iint_D xe^y dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_{x^2}^{-x^2+2} xe^y dy\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[xe^y\right]_{x^2}^{-x^2+2} dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{-x^2+2} - xe^{x^2}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2+2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 2e + 1)
\end{aligned}$$

例 9-2 以下の重積分を計算しよう.

$$\iint_D xdxdy, \quad D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\right\}$$

右図は, 領域 D を $\mathbb{R}^2$ 平面に図示したものである. 領域 D は横線集合であるから, 求める重積分は



$$\begin{aligned}
\iint_D xdxdy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\int_y^{\sqrt{1-y^2}} xdx\right\} dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2y^2)\, dy \\
&= \frac{1}{2}\left[y - \frac{2}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

累次積分は, dx と dy の順序をちゃんと意識して!
なんにも考えずに, $dxdy$ って書いちゃうと減点の対象だよ!
領域 D をちゃんと図示して, 縦線集合か横線集合か把握することが大事なんだ!
縦線領域にも横線領域にもなってるときは, 積分の順序を交換できるよ!
順序を交換する際は, 積分区間に注意してね!

レポート 9-1 (1) 領域 D を, 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ と x 軸で囲まれる領域とする. このとき, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (x^2 - y^2) dxdy$$

(2) 積分の順序を交換することで,

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dydx$$

を計算せよ.